Introdução à Pesquisa Operacional

Profa. Marina Andretta

(baseado nos slides da Profa. Franklina Toledo)

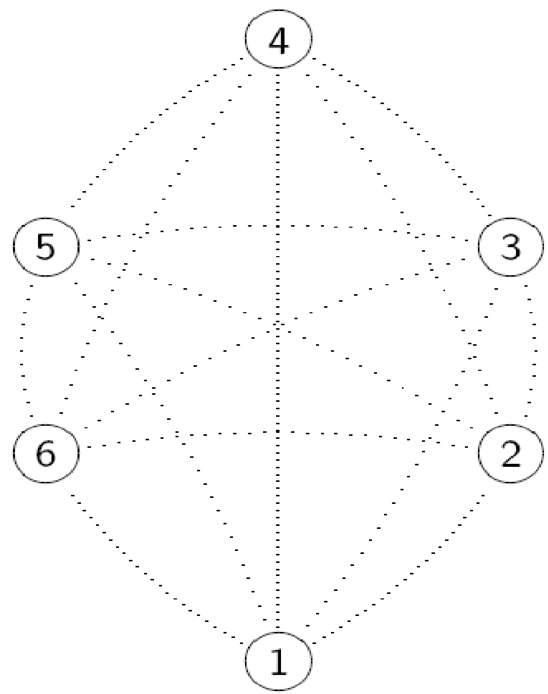
Aula baseada em diversas fontes:

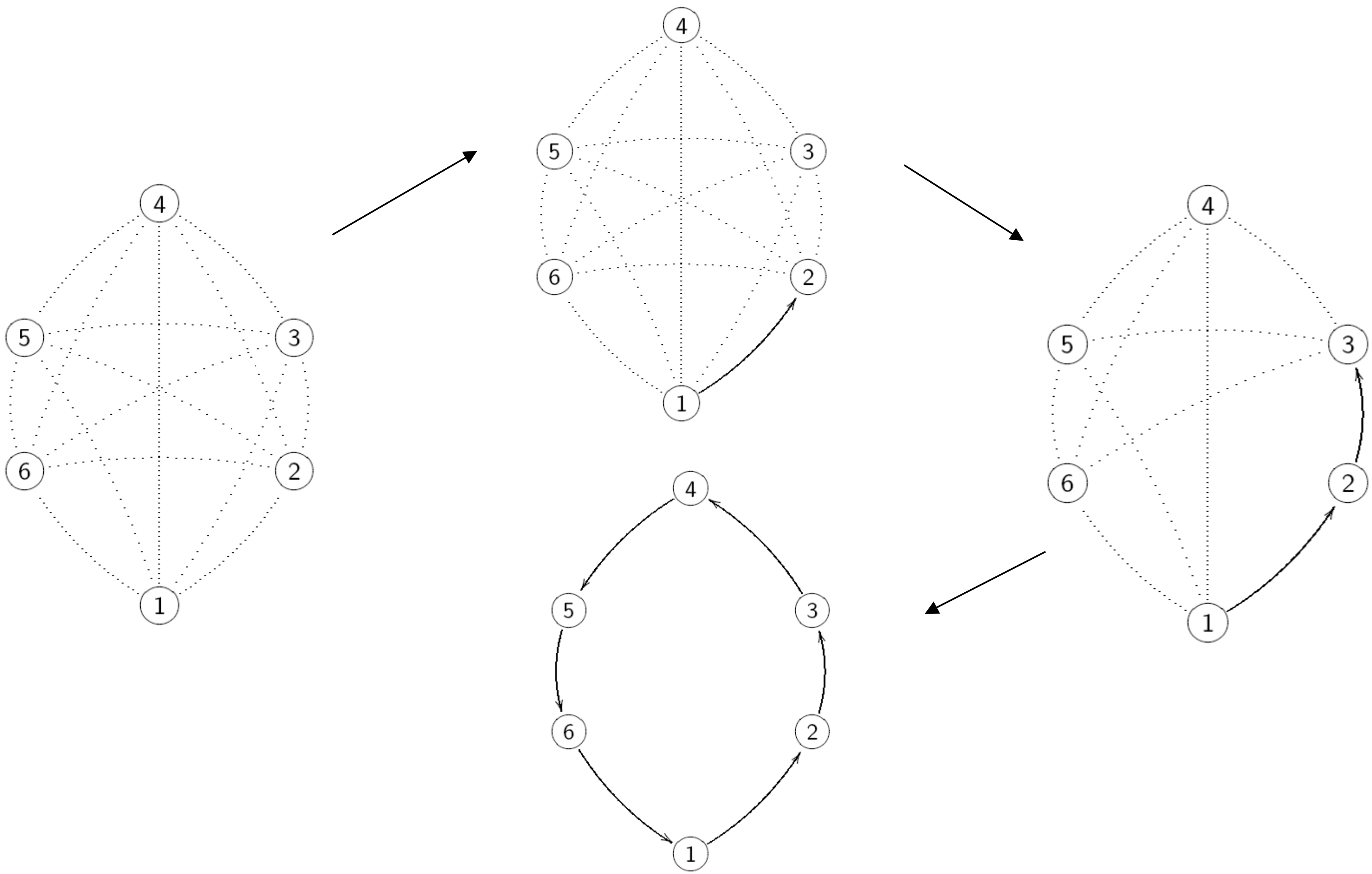
“Integer programming” de L. Wolsey, 1998.
“Pesquisa operacional” de Arenales et al., 2007.
Slides do Prof. Celso Carneiro
Apostila “Programação da produção”, Prof. Marcos N. Arenales

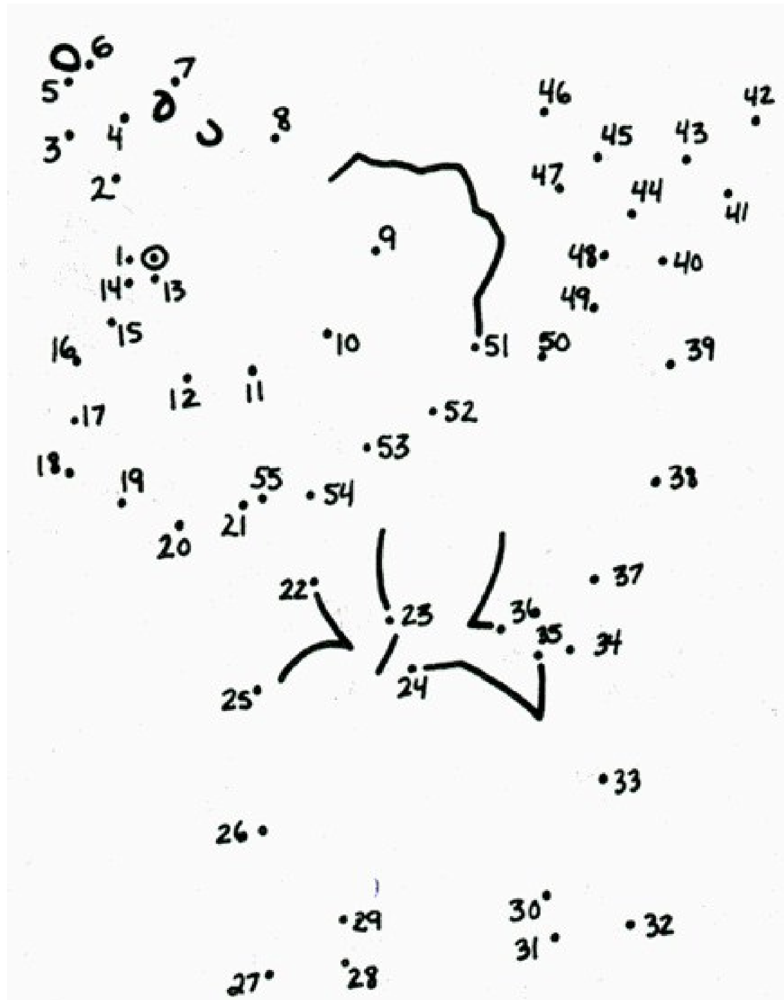
Problemas clássicos

Caixeiro viajante

Problemas de caixeiro-viajante (CV) envolvem um conjunto de cidades, em que o caixeiro sai de uma cidade base ou um depósito, visita todas as cidades ou um subconjunto delas somente uma vez, e retorna à cidade base de modo a otimizar um ou mais objetivos.




4
5
3
6
2
1



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55

www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html

Concurso Proctor and Gamble – 1962. O problema era encontrar a melhor Rota para percorrer todas as 33 cidades. Fonte: www.math.uwaterloo.ca/tsp/history/

The Travelling Salesman Problem: a computational study. Applegate, Bixby, Chvátal and Cook

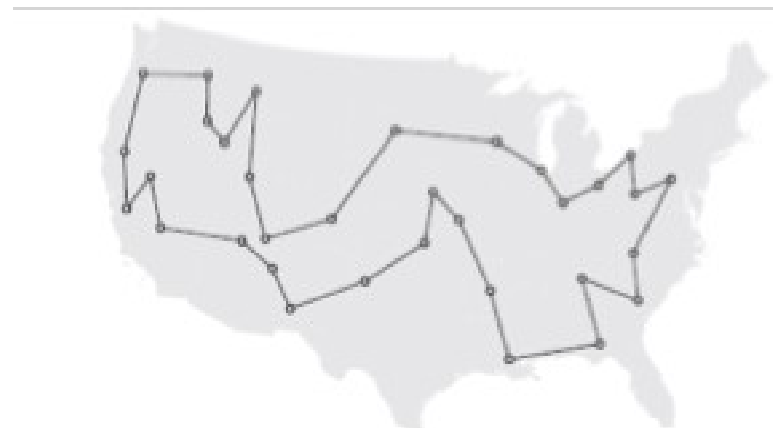
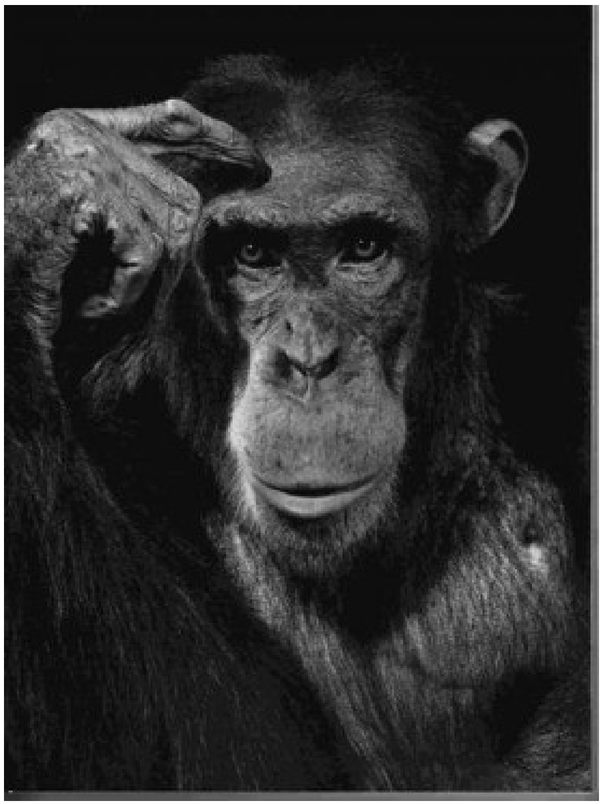


Figure 1.10 Optimal 33-city tour.

Animais resolvendo o TSP



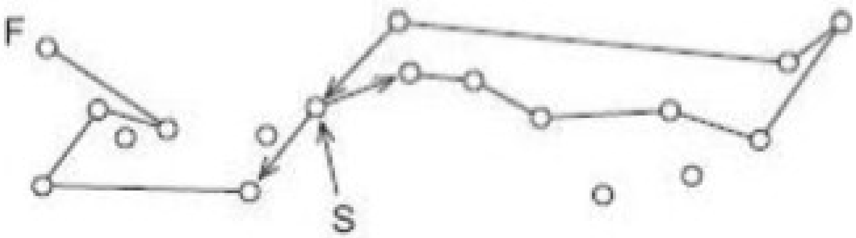
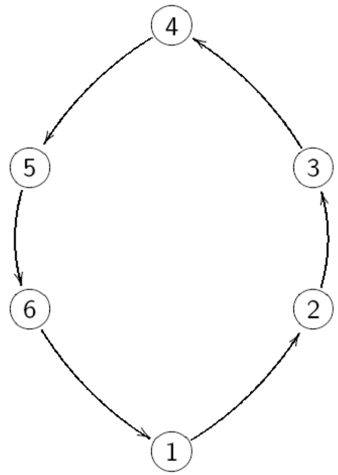


Figure 1.40 Chimpanzee tour (Bido).

Formulação matemática



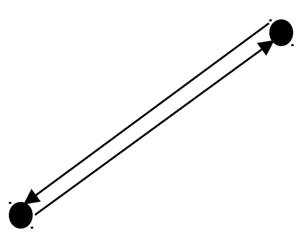
$$\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

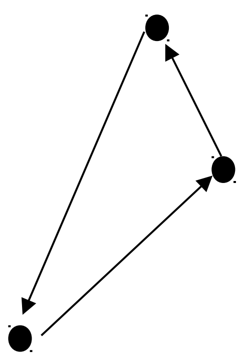
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 1 \quad i = 1,\ldots,n$$

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad S \subseteq N - \{1\}, |S| \geq 2$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j) \in A$$





Problema 1

Os quatro alunos de uma república fizeram uma análise das principais tarefas que precisam ser realizadas na semana e as dividiram em quatro grupos.

Fonte: http://tinyhousetalk.com/future-of-tiny-houses/

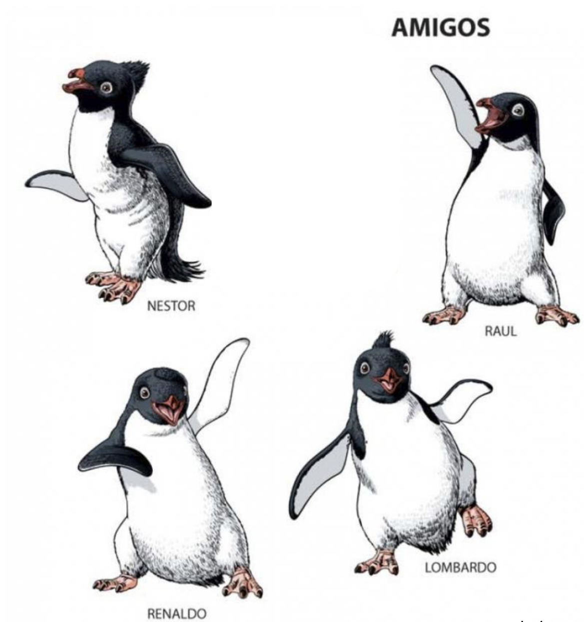
Problema 1

Cada aluno deu uma nota de 0 a 5 para cada grupo de tarefas, sendo 0 se ele for ficar muito infeliz fazendo as tarefas deste grupo e 5 se ele ficar muito feliz. As notas intermediárias correspondem a um grau intermediário de felicidade. Os dados são resumidos a seguir.

	Aluno1	Aluno2	Aluno3	Aluno4
Grupo1	0	1	3	5
Grupo2	3	2	4	5
Grupo3	4	1	5	5
Grupo4	5	2	3	5

Problema 1

Seu objetivo é atribuir um grupo de tarefas para cada um dos alunos de forma que a alegria da casa seja a maior possível. Regras: toda tarefa tem que ser realizada e todo aluno tem que fazer algo. Ou seja ... um para um ....



Fonte:http://dibujoscolorear.net/coloring/61304

Problemas de designação

- Alocar n tarefas a n agentes de modo a minimizar o custo total de designação;

A execução da tarefa j pelo agente i tem um custo c_{ij}.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } j \text{ é designada ao agente } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\mathbf{x} \in B^{nn}$$

Slide baseado no livro “Pesquisa Operacional”, Arenales et al., 2007

Problemas de designação *generalizada*

- m agentes, n tarefas
- cada tarefa deve ser realizada por um único agente.
- cada agente pode realizar mais de uma tarefa.
- cada agente i gasta a_{ij} de um dado recurso (tempo, e.g.) para executar a tarefa j.
- cada agente dispõe de b_i unidades do recurso.

Problemas de designação *generalizada*

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a tarefa } j \text{ é designada ao agente } i \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\cancel{\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\mathbf{x} \in B^{nn}$$

Problema 2

Um aluno tem vários trabalhos para entregar este semestre e gostaria de planejar sua vida de forma a minimizar o atraso na entrega dos trabalhos. Será possível?

Problema 2

Todos os trabalhos, o tempo necessário para realizá-lo e sua data de entrega são descritos na tabela abaixo. O tempo é dado em dias e uma vez começado um trabalho, o aluno decidiu que só para quando terminá-lo.

Trabalho	Tempo	Data de entrega
1	2 dias	16/8
2	3 dias	19/8
3	2 dias	17/8
4	1 dia	20/8

Problema 2

Ajude o aluno a se organizar, modele o problema como um problema de otimização inteira tendo como objetivo minimizar a soma dos atrasos na entrega dos trabalhos. Suponha que ele pode começar a trabalhar hoje (19/8).

Trabalho	Tempo	Data de entrega
1	2 dias	16/8
2	3 dias	19/8
3	2 dias	17/8
4	1 dia	20/8

Problema de escalonamento

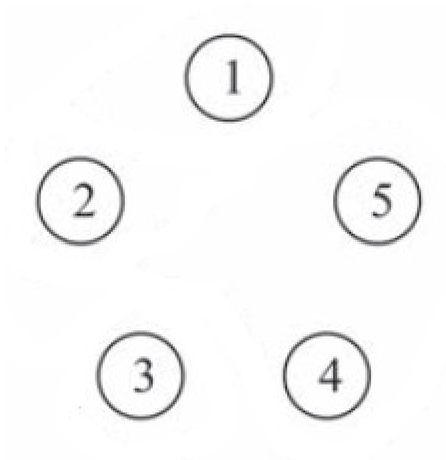
$$
\begin{aligned}
\min \quad & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
s.a \quad & t_i \geq t_j + p_j - M\left(1 - y_{ij}\right) \\
& t_j \geq t_i + p_i - M y_{ij} \\
& a_i \geq t_i + p_i - d_i \\
& y_{ij} + y_{ji} = 1 \\
& t_i \geq 19; a_i \geq 0 \\
& y_{ij} \in \{0,1\}; y_{ii} = 0
\end{aligned}
$$

para i = 1,…,4 e j = 1,…,4.

Problemas de cobertura/partição/empacotamento

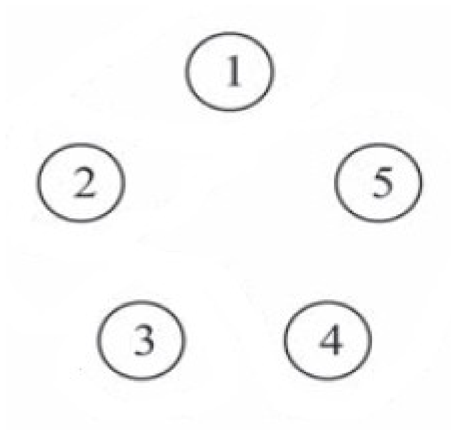
- Selecionar subconjuntos de um conjunto inicial de forma a *cobrir, particionar ou empacotar* o conjunto inicial.

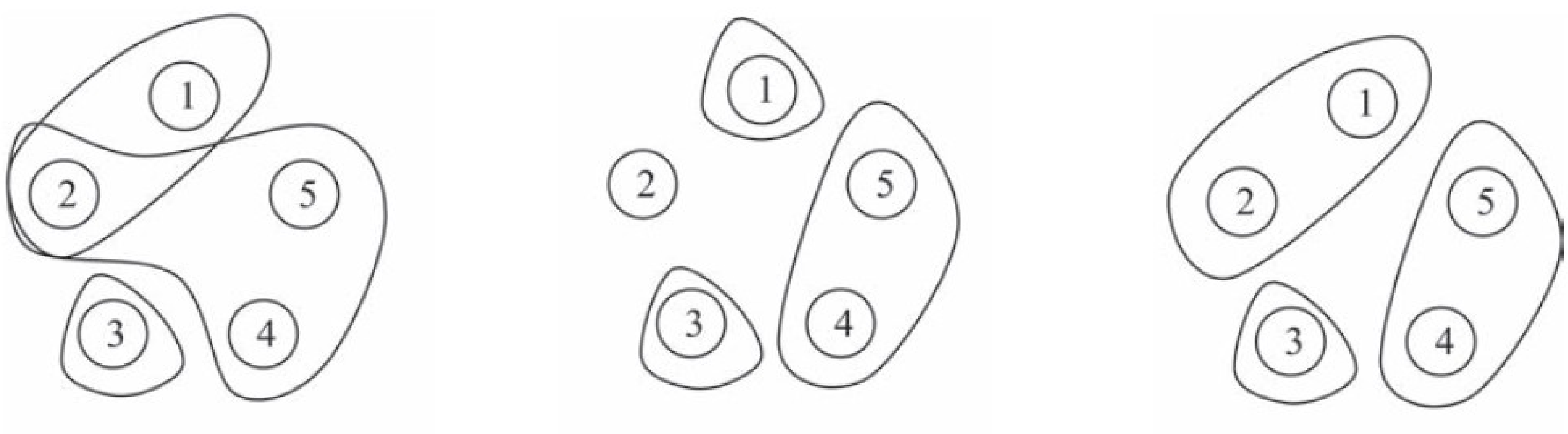
$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



Slide baseado no livro "Pesquisa Operacional", Arenales et al., 2007

Problemas de cobertura/partição/empacotamento

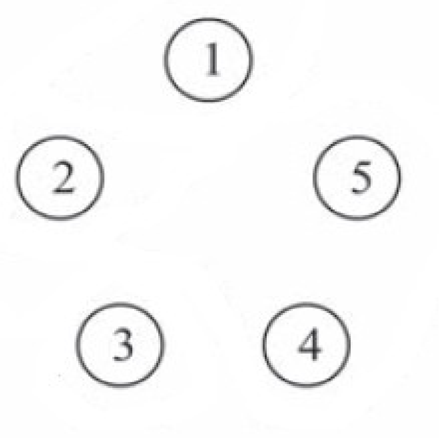




Cobertura Empacotamento Partição

Slide baseado no livro "Pesquisa Operacional", Arenales et al., 2007

- Exemplo de aplicação: localização de facilidades de emergência (corpo de bombeiros, ambulâncias)



x_1: consegue atender em 10 minutos (tempo máximo desejado) os bairros 1 e 2;

x_2: consegue atender em 10 minutos os bairros 1, 3 e 5;

x_3: consegue atender em 10 minutos os bairros 2,4,5;

x_4: consegue atender em 10 minutos o bairro 3;

x_5: consegue atender em 10 minutos o bairro 1;

x_6: consegue atender em 10 minutos os bairros 4 e 5.

cobertura, empacotamento ou particionamento ?

Cobertura

- Exemplo:

$$\overset{x_1}{S_1} = \{1,2\},\ \overset{x_2}{S_2} = \{1,3,5\},\ \overset{x_3}{S_3} = \{2,4,5\},\ \overset{x_4}{S_4} = \{3\},\ \overset{x_5}{S_5} = \{1\},\ \overset{x_6}{S_6} = \{4,5\}$$

facilidade de atendimento j com custo de instalação c_j.

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se a facilidade } j \text{ é selecionada} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\min \sum_{j=1}^{6} c_j x_j$$

$$\begin{array}{llllllll}
x_1 + x_2 & & & + x_5 & & \geq 1 & \text{(bairro 1)} \\
x_1 & + x_3 & & & & \geq 1 & \text{(bairro 2)} \\
x_2 & & + x_4 & & & \geq 1 & \text{(bairro 3)} \\
& x_3 & & & + x_6 & \geq 1 & \text{(bairro 4)} \\
x_2 & + x_3 & & & + x_6 & \geq 1 & \text{(bairro 5)}
\end{array}$$

$$\mathbf{x} \in B^6$$

De maneira geral

$$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{1}$$
$$\mathbf{x} \in B^n,$$

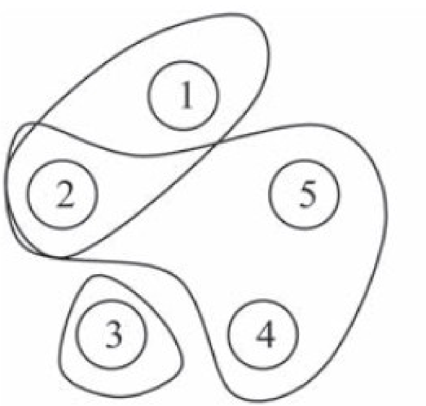
Cobertura

$$\max \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{1}$$
$$\mathbf{x} \in B^n$$

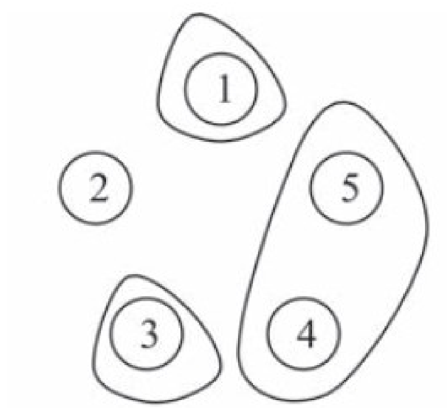
Empacotamento

$$\min \mathbf{c}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{x} \in B^n$$

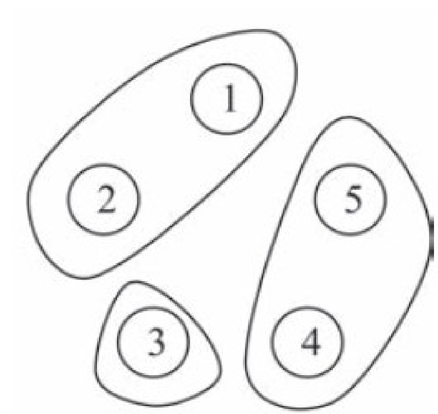
Particionamento



Cobertura



Empacotamento



Partição

Slide baseado no livro "Pesquisa Operacional", Arenales et al., 2007