Propriedades de problemas de programação linear

Marina Andretta

ICMC-USP

11 de setembro de 2019

Baseado no livro Introduction to Linear Optimization, de D. Bertsimas e J. N. Tsitsiklis.

Poliedros

Vamos agora apresentar alguns conceitos importantes que serão usados para estudar a geometria de problemas de programação linear.

Definição 1. *Um poliedro é um conjunto que pode ser descrito na forma* $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$*, com A uma matriz em* $\mathbb{R}^{m \times n}$ *e b um vetor em* $\mathbb{R}^m$*.*

Como vimos anteriormente, o conjunto de pontos viáveis de um problema de programação linear pode ser definido usando a forma $Ax \geq b$. Portanto, este conjunto é um poliedro.

Poliedros

Um conjunto da forma $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ também é um poliedro e será chamado de poliedro na forma padrão.

Poliedros podem se estender para o infinito ou estar confinados em uma região finita.

Definição 2. *Um conjunto* $S \in \boldsymbol{R}^n$ *é convexo se, para todo* $x, y \in S$ *e todo* $\lambda \in [0, 1]$*, temos que* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$*.*

Ou seja, um conjunto S é convexo se todo segmento de reta que liga dois de seus elementos está inteiramente contido em S.

Uma propriedade importante que iremos usar adiante é que todo poliedro é um conjunto convexo.

Vértices

Como já observamos, as soluções ótimas de problemas de programação linear tendem a estar em "cantos" do poliedro sobre o qual estamos otimizando. Uma definição para estes "cantos" é a de vértice.

Definição 3. *Seja P um poliedro. Um vetor $x \in P$ é um vértice de P se existe um c tal que $c^T x < c^T y$ para todo $y \in P$, $y \neq x$.*

Esta definição dá uma intuição geométrica de como encontrar soluções de problemas de programação linear, mas ela não é prática de ser usada em um algoritmo.

Gostaríamos de ter uma definição que dependa da representação do poliedro em termos de restrições lineares e que se reduza a um teste algébrico.

Vértices

Considere um poliedro $P \subset \boldsymbol{R}^n$ definido em termos das restrições lineares de igualdade e desigualdade

$$
\begin{array}{ll}
a_i^T x \geq b_i, & i \in M_1, \\
a_i^T x \leq b_i, & i \in M_2, \\
a_i^T x = b_i, & i \in M_3,
\end{array}
$$

com M_1, M_2 e M_3 conjuntos finitos de índices, $a_i \in \boldsymbol{R}^n$ e $b_i \in \boldsymbol{R}$.

Definição 4. *Se um vetor x^* satisfaz $a_i^T x^* = b_i$ para algum i em M_1, M_2 ou M_3, dizemos que a restrição correspondente é ativa em x^*.*

Vértices

Se há n restrições ativas em um vetor x^*, então x^* é solução de um sistema linear com n equações e n incógnitas.

Este sistema linear tem solução única se, e somente se, estas n equações são "linearmente independentes".

Vértices

Teorema 1. *Sejam* $x^* \in \mathbf{R}^n$ *e* $I = \{i \mid a_i^T x^* = b_i\}$ *o conjunto de índices das restrições que são ativas em* x^*. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Existem* n *vetores no conjunto* $\{a_i \mid i \in I\}$ *que são linearmente independentes.*

(b) *O subespaço gerado pelos vetores* a_i, *para todo* $i \in I$, *é todo* $\mathbf{R}^n$, *isto é, todo elemento de* $\mathbf{R}^n$ *pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores* a_i.

(c) *O sistema de equações* $a_i^T x = b_i$, *para todo* $i \in I$, *tem uma solução única.*

Soluções básicas viáveis

Em alguns momentos, abusaremos da linguagem e diremos que algumas restrições são linearmente independentes. Com isso queremos dizer que os vetores a_i correspondentes às restrições são linearmente independentes.

Usando este abuso de linguagem, podemos dizer que o item (a) do Teorema 1 diz que existem n restrições linearmente independentes em x^*.

Soluções básicas viáveis

Agora podemos definir um "canto" algebricamente, como uma solução viável na qual existem n restrições ativas linearmente independentes.

Como estamos interessados em soluções viáveis, todas as restrições de igualdade devem ser ativas.

Isso sugere o seguinte modo de ver "cantos": primeiramente, impor que todas as restrições de igualdade sejam ativas. Depois, impor que uma quantidade suficiente de restrições seja ativa, para que haja n restrições ativas linearmente independentes.

Soluções básicas viáveis

Com n restrições ativas linearmente independentes, um único vetor x^* é determinado.

No entanto, este procedimento não garante que x^* seja viável, porque algumas restrições inativas podem não ser satisfeitas.

Neste caso, dizemos que temos uma solução básica, mas não uma solução básica viável.

Definição 5. *Considere um poliedro P definido por equações e inequações lineares e seja $x^* \in \mathbf{R}^n$.*

(a) *O vetor x^* é uma solução básica se:*

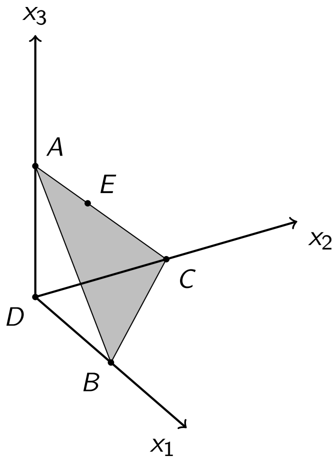
   (i) *todas as equações (restrições de igualdade) são ativas;*

   (ii) *das restrições que são ativas em x^*, existem n delas que são linearmente independentes.*

(b) *Se x^* é uma solução básica que satisfaz todas as restrições, dizemos que x^* é uma solução básica viável.*

Exemplo

Considere o poliedro $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1;\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$, representado na figura abaixo.



Exemplo

Os pontos A, B e C são soluções básicas viáveis.

O ponto D não é uma solução básica, já que não satisfaz restrição de igualdade $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

O ponto E é viável, mas não é uma solução básica, já que as restrições ativas neste ponto são apenas 2: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ e $x_1 = 0$.

Note que, de acordo com a definição de solução básica, se a restrição $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ fosse substituída pelas restrições $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$ e $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, o ponto D seria considerado uma solução básica, já que satisfaz 3 restrições linearmente independentes: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 0$.

Número de soluções básicas viáveis

Uma propriedade importante é que, se P um poliedro não-vazio e $x^* \in P$, x^* é um vértice se, e somente se, x^* é uma solução básica viável.

Outra propriedade que será muito importante na definição de um algoritmo para resolver problemas de programação linear é que, dado um número finito de restrições lineares de desigualdade, só pode haver um número finito de soluções básicas e soluções básicas viáveis.

Número de soluções básicas viáveis

Apesar do número de soluções básicas (e, consequentemente, de soluções básicas viáveis) ser finito, ele pode ser muito grande.

Por exemplo, considere o cubo $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, ..., n\}$. Ele é definido usando $2n$ restrições, mas tem 2^n soluções básicas viáveis.

Soluções básicas adjacentes

Duas soluções básicas distintas de um conjunto de restrições lineares em $\mathbb{R}^n$ são chamadas de adjacentes se podemos encontrar $n - 1$ restrições linearmente independentes que são ativas em ambas as soluções.

Se duas soluções básicas adjacentes são viáveis, o segmento de reta que as une é chamado de aresta do conjunto viável.

Poliedros na forma padrão

Já vimos a definição de soluções básicas para poliedros gerais. Agora iremos nos focar em resultados para poliedros na forma padrão, que é uma maneira conveniente de representar poliedros para o desenvolvimento de algoritmos.

Seja $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ um poliedro na forma padrão, com $A \in \boldsymbol{R}^{m \times n}$ e $b \in \boldsymbol{R}^m$.

A menos que especifiquemos o contrário, iremos supor que as linhas de A são linearmente independentes (então, $m \leq n$).

Mais adiante veremos que quando P não é vazio, linhas linearmente dependentes de A correspondem a restrições redundantes, que podem ser eliminadas.

Portanto, esta suposição pode ser feita sem perda de generalidade.

Soluções básicas

Lembre-se que em uma solução básica deve haver n restrições linearmente independentes que são ativas.

Além disso, uma solução básica deve satisfazer todas as restrições de igualdade.

Soluções básicas

No caso do poliedro P, isso significa que a solução básica deve satisfazer $Ax = b$, que corresponde a m restrições ativas linearmente independentes (já que estamos supondo que as linhas de A são linearmente independentes).

Para obtermos as $n - m$ restrições ativas restantes, precisamos escolher $n - m$ variáveis x_i e defini-las como 0, fazendo com que as restrições $x_i \geq 0$ sejam ativas.

Mas, como as n restrições ativas precisam ser linearmente independentes, a escolha destas $n - m$ variáveis não pode ser arbitrária.

Teorema 2. *Considere as restrições* $Ax = b$ *e* $x \geq 0$, *com* $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ *e* A *com linhas linearmente independentes. Um vetor* $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ *é uma solução básica se, e somente se,* $A\bar{x} = b$ *e há índices* $B(1), ..., B(m)$ *tais que*

(a) *as colunas* $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ *são linearmente independentes;*

(b) *se* $i \neq B(1), ..., B(m)$, *então* $\bar{x}_i = 0$.

Soluções básicas

Usando o Teorema 2, podemos usar o seguinte procedimento para construir soluções básicas:

1. Escolha m colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ de A linearmente independentes, formando uma matriz B.
2. Defina $x_i = 0$ para todo $i \neq B(1), ..., B(m)$.
3. Resolva o sistema linear $Bx_B = b$ com m equações e m incógnitas, dadas por $x_B = (x_{B(1)}, ..., x_{B(m)})$.

Soluções básicas

Note que se uma solução básica calculada usando este procedimento tem todas as componentes não-negativas, então ela é uma solução básica viável.

Por outro lado, como toda solução básica viável é uma solução básica, ela pode ser calculada usando este procedimento.

Soluções básicas

Se x é uma solução básica, as variáveis $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$ são chamadas de variáveis básicas. As demais variáveis são chamadas de variáveis não-básicas.

As colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ são chamadas de colunas básicas. Como elas são linearmente independentes, elas formam uma base de $\mathbb{R}^m$.

Diremos que duas bases são distintas se os conjuntos de índices básicos $\{B(1), ..., B(m)\}$ para as duas bases forem diferentes.

Se os conjuntos de índices básicos forem iguais (mesmo que a ordem dos índices seja outra), diremos que as bases são as mesmas.

Soluções básicas

Rearranjando as colunas da matriz A de forma que as colunas $A_{B(1)}, ..., A_{B(m)}$ fiquem no início, temos a matriz $\bar{A}$

$$\bar{A} = (B \quad N),$$

com

$$B = \begin{pmatrix} | & & | \\ A_{B(1)} & \dots & A_{B(m)} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

e N formada pelas colunas restantes de A.

Como as colunas de B são linearmente independentes, B é inversível.

Soluções básicas

De modo similar, podemos definir um vetor básico $\bar{x}$ como

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{B(1)} \\ \vdots \\ \bar{x}_{B(m)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, as variáveis básicas podem ser determinadas resolvendo o sistema linear $B\bar{x}_B = b$, que tem solução única $\bar{x}_B = B^{-1}b$.

Exemplo

Considere as restrições $Ax = b$ como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Vamos escolher as colunas A_4, A_5, A_6 e A_7 como colunas básicas.

Elas são linearmente independentes e a matriz básica B correspondente é a matriz identidade.

Neste caso, a solução básica é dada por $x = (0, 0, 0, 8, 12, 4, 6, 0)$, que tem todas as componentes não-negativas. Então, x é uma solução básica viável.

Exemplo

Uma outra base pode ser obtida escolhendo as colunas A_3, A_5, A_6 e A_7, que são linearmente independentes. Ou seja,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema

$$Bx_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = b,$$

obtemos $x_B = (4, -12, 4, 6)$.

Exemplo

Assim, a solução básica correspondente é dada por $x = (0, 0, 4, 0, -12, 4, 6, 0)$.

Como $x_5 = -12 < 0$, x não é viável.

Exemplo

Note que as colunas A_7 e A_8 são iguais. Então, os conjuntos $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_3, A_5, A_6, A_8\}$ são iguais.

No entanto, os conjuntos de índices básicos correspondentes são $\{3, 5, 6, 7\}$ e $\{3, 5, 6, 8\}$, que são diferentes.

Portanto, pela nossa definição, temos duas bases diferentes.

Correspondência entre bases e soluções básicas

Soluções básicas diferentes devem corresponder a bases diferentes, já que uma base determina uma única solução básica.

No entanto, duas bases diferentes podem levar a uma mesma solução básica.

Por exemplo, se temos $b = 0$, a única solução básica é dada pelo vetor nulo, para todas as bases.

Este fenômeno tem importantes consequências algorítmicas e está relacionado com degenerescência. Isso será tratado mais adiante.

Soluções básicas adjacentes e bases adjacentes

Lembre-se que dizemos que duas soluções básicas são adjacentes se ambas tem $n - 1$ restrições linearmente independentes iguais.

Para problemas na forma padrão, também dizemos que duas bases são adjacentes se elas têm somente uma coluna básica diferente.

Não é difícil ver que soluções básicas adjacentes podem ser obtidas de bases adjacentes.

Além disso, se duas bases adjacentes levam a diferentes soluções básicas, estas são adjacentes.

Exemplo

No exemplo anterior, as bases $\{A_4, A_5, A_6, A_7\}$ e $\{A_3, A_5, A_6, A_7\}$ são adjacentes porque elas têm apenas uma coluna diferente.

As soluções básicas correspondentes são $(0, 0, 0, 8, 12, 4, 6, 0)$ e $(0, 0, 4, 0, -12, 4, 6, 0)$, que são adjacentes.

Temos $n = 8$ e um total de 7 restrições ativas linearmente independentes em comum, que são as 4 restrições de igualdade, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_8 \geq 0$.

Eliminação de restrições “linearmente dependentes”

Sempre que um poliedro é não-vazio, um problema de programação linear na forma padrão pode ser reduzido a um outro problema equivalente de programação linear na forma padrão (com mesmo conjunto viável) com restrições linearmente independentes.

Exemplo

Considere o poliedro não-vazio definido pelas restrições

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1, \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1, \\ & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0. \end{array}$$

A matriz A correspondente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tem as duas últimas linhas são linearmente independentes e a primeira é resultado da soma das outras duas.

Então, a primeira restrição é redundante e, ao eliminá-la, temos o mesmo poliedro.

Degenerescência

De acordo com nossa definição, em uma solução básica devemos ter n restrições ativas linearmente independentes. Isso possibilita que haja mais restrições ativas (mas, claramente, apenas n delas podem ser linearmente independentes).

Neste caso, dizemos que temos uma solução básica degenerada.

Em outras palavras, em uma solução básica degenerada há mais restrições ativas do que o mínimo necessário.

Degenerescência

Em duas dimensões, uma solução básica degenerada está na interseção de três ou mais retas. Em três dimensões, está na interseção de quatro ou mais planos.

A presença de degenerescência pode afetar muito o comportamento de algoritmos para programação linear.

Exemplo

Considere o poliedro P definido pelas restrições

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 8, \\
 & & x_2 & + & 6x_3 & \leq & 12, \\
 & & & & x_1 & \leq & 4, \\
 & & & & x_2 & \leq & 6, \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

O ponto $(2, 6, 0)$ é viável e para ele 3 restrições são ativas: $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$, $x_2 \leq 6$ e $x_3 \geq 0$.

Como os vetores correspondentes a essas restrições, dados por $(1, 1, 2)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, são linearmente independentes, o ponto $(2, 6, 0)$ é uma solução básica viável.

Exemplo

Já o ponto $(4, 0, 2)$ é viável e para ele 4 restrições são ativas:
$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8$, $x_2 + 6x_3 \leq 12$, $x_1 \leq 4$ e $x_2 \geq 0$.

Existem vetores correspondentes a 3 destas 4 restrições ativas que são linearmente independentes (por exemplo, $(1, 1, 2)$, $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$).

Portanto, $(4, 0, 2)$ é uma solução básica viável degenerada.

Degenerescência em poliedros na forma padrão

Em uma solução básica de um poliedro na forma padrão, as m restrições de igualdade são sempre ativas.

Então, para ter mais de n restrições ativas, é preciso que haja mais de $n - m$ variáveis nulas.

Exemplo

Considere o poliedro do exemplo anterior. Introduzindo as variáveis de folga x_4, x_5, x_6 e x_7, podemos transformá-lo no poliedro na forma padrão $P = \{x = (x_1, x_2, ..., x_7) \mid Ax = b, x \geq 0\}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Para construir uma solução básica, precisamos escolher 4 colunas linearmente independentes de A. Vamos escolher as colunas A_1, A_2, A_3 e A_7.

Exemplo

Resolvendo o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

temos $(x_1, x_2, x_3, x_7) = (4, 0, 2, 6)$. Definindo as variáveis não-básicas $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, temos a solução básica viável $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$.

Note que esta solução é degenerada, já que a variável $x_2 = 0$ e, por isso, temos 8 restrições ativas em x.

Considere agora as colunas linearmente independentes A_1, A_3, A_4 e A_7. A solução básica viável correspondente também é $x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 6)$.

Degenerescência em poliedros na forma padrão

O exemplo anterior sugere que podemos pensar em degenerescência da seguinte maneira: definimos uma solução básica escolhendo n restrições linearmente independentes a serem satisfeitas por igualdade e, ao fazer isso, percebemos que outras restrições também foram satisfeitas por igualdade.

Se as componentes de A e b são escolhidas aleatoriamente, as chances disso acontecer são pequenas. Além disso, se modificamos um pouco os coeficientes de restrições ativas, a degenerescência pode desaparecer.

No entanto, em problemas práticos, as componentes de A e b possuem uma estrutura especial, não aleatória, e degenerescência é um fato mais comum do que pode parecer.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

A degenerescência não é uma característica puramente geométrica, independente da representação do poliedro usada.

Para ilustrar este fato, considere o poliedro na forma padrão
$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$.

O vetor $(1, 1, 0)$ é viável e tem apenas uma componente nula (satisfaz a restrição $x_3 \geq 0$ por igualdade). Portanto, é uma solução básica viável não-degenerada.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

Já o vetor $(0, 0, 1)$ é viável, mas tem 2 componentes nulas (satisfaz as restrições $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ por igualdade). Portanto, é uma solução básica viável degenerada.

Note que o mesmo poliedro pode ser escrito da forma (não-padrão)
$P = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 2,\ x_1, x_3 \geq 0\}$.

Para esta nova formulação, o vetor $(0, 0, 1)$ é uma solução básica viável não-degenerada, já que satisfaz 3 restrições por igualdade: $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$ e $x_3 \geq 0$, todas elas linearmente independentes.

Degenerescência não é uma propriedade puramente geométrica

Vimos que uma solução básica viável pode ser degenerada usando uma representação de um poliedro e não-degenerada usando outra.

No entanto, podemos mostrar que se uma solução básica viável é degenerada em uma representação na forma padrão de um poliedro P, ela será degenerada em qualquer outra representação na forma padrão de P.

Existência de vértices

Note que nem todo poliedro tem vértices.

Por exemplo, considere um semiespaço de $\boldsymbol{R}^n$, $n > 1$. Este é um poliedro que não contém vértices.

Mais ainda, o poliedro $\{x \in \boldsymbol{R}^n \mid Ax \geq b\}$ não tem uma solução básica se a matriz A tem menos de n linhas.

Existência de vértices

A existência de vértices em um poliedro está ligada com o fato do poliedro conter ou não uma reta (infinita).

Definição 6. *Um poliedro* $P \subset \boldsymbol{R}^n$ *contém uma reta se existe um vetor* $x \in P$ *e um vetor não-nulo* $d \in \boldsymbol{R}^n$ *tal que* $x + \lambda d \in P$ *para todo escalar* $\lambda \in \boldsymbol{R}$.

Teorema 3. *Suponha que* $P = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid a_i^T x \geq b_i, i = 1, ..., m\}$ *é um poliedro não-vazio. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *O poliedro* P *tem pelo menos um vértice.*

(b) *O poliedro* P *não contém uma reta.*

(c) *Existem* n *vetores na família* $a_1, ..., a_m$ *que são linearmente independentes.*

Existência de vértices

Note que um poliedro limitado não contém uma reta.

Além disso, o ortante positivo $\{x \mid x \geq 0\}$ não contém uma reta. Como um poliedro na forma padrão está contido no ortante positivo, ele também não contém uma reta.

Com essas observações, temos o seguinte corolário:

Corolário 1. *Todo poliedro limitado não-vazio e todo poliedro não-vazio na forma padrão tem pelo menos uma solução básica viável.*

Otimalidade dos vértices

Agora que definimos as condições para um poliedro ter vértices, temos o seguinte resultado.

Teorema 4. *Considere o problema de programação linear de minimizar* $c^T x$ *em um poliedro* P*. Suponha que* P *tem pelo menos um vértice e que existe uma solução ótima. Então existe uma solução ótima que é um vértice de* P*.*

Otimalidade dos vértices

O Teorema 4 se aplica a poliedros na forma padrão, assim como a poliedros limitados, já que eles não contêm retas.

O Teorema 5 é um pouco mais forte do que o Teorema 4, já que ele afirma que a existência de uma solução ótima pode ser ignorada, desde que o custo ótimo seja finito.

Teorema 5. *Considere o problema de programação linear de minimizar* $c^T x$ *em um poliedro* P. *Suponha que* P *tem pelo menos um vértice. Então ou o custo ótimo é* $-\infty$ *ou existe um vértice de* P *que é ótimo.*

Otimalidade dos vértices

Para um problema de programação linear geral, se o conjunto viável não contém um vértice, o Teorema 5 não pode ser aplicado diretamente.

Por outro lado, todo problema de programação linear pode ser escrito na forma padrão, para o qual o Teorema 5 sempre vale.

Assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 2. *Considere o problema de programação linear de minimizar* $c^T x$ *em um poliedro* P *não-vazio. Então ou o custo ótimo é* $-\infty$ *ou existe um vértice de* P *que é ótimo.*