médio

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

Exercício. Considere a tarefa de integrar a função $f(x) = x\sin(x)$ no intervalo $[0 \quad 1]$ usando Simpson composto. Estime quantos pontos devem ser levados em conta para que o erro de truncamento não ultrapasse $0,001$. Realize a integração.

PELO FORMULÁRIO, $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{n/2-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1}) + f(b)\right] +$ [1]

$+ (-)\ \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\mu)$, $a \le \mu \le b$. TAMBÉM TEMOS $\frac{b-a}{n} = h$. DESTAS EQ.S. VEM QUE $|E_T| = \left|\frac{(b-a)^5}{180\, n^4} f^{(4)}(\mu)\right| = \frac{1^5}{180 n^4}\left|f^{(4)}(\mu)\right| \le \frac{5}{180 n^4}$. [1]

DESEJAMOS $|E_T| \le 0{,}001$, LOGO DEVEMOS TER $\frac{5}{180 n^4} \le 0{,}001 \Rightarrow n \geq 2{,}2957$

$\Rightarrow n \geq 4$ [1]

FAZENDO A INTEGRAÇÃO: $\int_a^b f(x)dx \cong \frac{1}{4 \cdot 3}\left[f(0) + 2 f(x_2) + 4 f(x_1) + 4 f(x_3) + f(1)\right]$

$\cong \frac{1}{12}\left[0 + 0{,}061851 \cdot 4 + 0{,}239713 \cdot \cancel{2} + 4 \cdot 0{,}511229 + 0{,}841471\right] \cong \frac{3{,}613}{12} \cong 0{,}30110$. [1]

À PROPÓSITO, USANDO PRECISÃO 10^{-15} OBTEMOS $\int_0^1 x \sin(x)\, dx \cong 0{,}3011687$, de onde se conclui que $|E_T| \cong |0{,}3011687 - 0{,}30110| = 0{,}0000687$, MENOR QUE O VALOR DESEJADO.

$f = x\sin(x)$

$f' = \sin(x) + x\cos(x)$

$f^{(2)} = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x) = 2\cos(x) - x\sin(x)$

$f^{(3)} = -2\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x) = -3\sin(x) - x\cos(x)$

$f^{(4)} = -3\cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = -4\cos(x) + x\sin(x)$

$|f^{(4)}(x)| \le 4|\cos(x)| + |x|\,|\sin(x)| \le 4 + 1 \cdot 1 = 5$

dificil

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

Exercício. Obtenha uma fórmula para o erro de arredondamento no método de quadratura adaptativa.

O método de Quadratura adaptativa resulta num erro de truncamento arbitrário, pré-especificado, mas não há um controle semelhante para o erro de arredondamento. Para estudá-lo, vamos assumir que o método gera (automaticamente) uma sequencia de pontos (malha) que denotamos por $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$, não igualmente espaçados, integrando a função usando simpson para cada três pontos. Ou, mais formalmente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(x_2-x_0)}{2\cdot 3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + \frac{(x_4-x_2)}{2\cdot 3}\left[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)\right] + \qquad (1)$$
$$+ \cdots + \frac{(x_{2n}-x_{2n-2})}{2\cdot 3}\left[f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right] + erro_t,$$

sendo $erro_t$ = erro de truncamento. Considerando $f = \hat{f} + e$, ou, $f(x_j) = \hat{f}(x_j) + e_j$, substituindo na expressão (1) e isolando os termos em "e", obtemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q - erro_t = \frac{(x_2-x_0)}{2\cdot 3}\left[e_0+4e_1+e_2\right] + \cdots + \frac{(x_{2n}-x_{2n-2})}{2\cdot 3}\left[e_{2n-2}+4e_{2n-1}+e_{2n}\right]$$

Assumindo que $|e_j| \le \varepsilon$ temos:

OBS: DENOTEI "Q" COMO SENDO O RESULTADO NUMÉRICO DA QUADRATURA ADAPT..

$$|e_A| = \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q - erro_t\right| \le \frac{1}{6}\left[\frac{|x_2-x_0|}{\cancel{3}}\cdot 6\varepsilon + \cdots + |x_{2n}-x_{2n-2}|\cdot 6\varepsilon\right]$$

$$= \varepsilon\left[|x_2-x_0| + \cdots + |x_{2n}-x_{2n-2}|\right] = \varepsilon\,(b-a).$$

Como vemos, o erro de arredondamento não é função do número de pontos da malha, nem do espaçamento entre os pontos.

<u>OBS</u>: pelo formulário temos $S(a,b) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$ onde $h = \frac{(b-a)}{2}$, logo $S(x_0, x_2) = \frac{x_2-x_0}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$ sendo que x_1 deve estar igualmente espaçado entre x_0 e x_2; similarmente para $S(x_i, x_{i+2})$, explicando de onde vem a eq. (1).

dificil

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa
http : //www.icmc.usp.br/ ~ efcosta/

Exercício. Seja a integração no intervalo $[a \quad b]$ por um método composto que utiliza trapézio, porém baseado numa malha irregular. Ou seja, trapézio baseado nos pontos $[x_0, \ldots, x_m]$ sendo m um número natural qualquer. Obtenha uma fórmula de erro de truncamento e arredondamento, e conclua se o erro de arredondamento é função dos espaçamentos da malha e/ou de m.

A fórmula para cada "trapézio" é $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) + \frac{(-)(x_i-x_{i-1})^3}{12} f^{(2)}(\mu_i)$ com $\mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$. (ISSO VEM DO FORMULÁRIO COM $h = b-a = x_i - x_{i-1}$ E $n=1$ NA FÓRMULA DE TRAPÉZIO COMPOSTO). ENTÃO $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \frac{f(x_i)+f(x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{-12} \cdot f^{(2)}(\mu_i)$, DE ONDE VEM QUE O ERRO DE TRUNCAMENTO É $E_T = -\sum_{i=1}^m \frac{(x_i - x_{i-1})^3}{12} f^{(2)}(\mu_i)$. (1)

Podemos desenvolver um pouco mais esta equação, usando algumas desigualdades. Por exemplo, $\max_j (x_j - x_{j-1})^3 \geq (x_i - x_{i-1})^3$ nos permite escrever, se definirmos $e_m \triangleq \max_j (x_j - x_{j-1})^3$, QUE: $E_T \leq \sum_{i=1}^m \max_j (x_j - x_{j-1})^3 \cdot \frac{1}{-12} f''(\mu_i) = -\frac{e_m}{12} \sum_{i=1}^m f''(\mu_i)$. (2)

Analogamente ao que fizemos em aula, $\sum_{i=1}^m \min_{a \leq \mu \leq b} f''(\mu) \leq \sum_{i=1}^m f''(\mu_i) \leq \sum_{i=1}^m \max_{a \leq \mu \leq b} f''(\mu)$ leva a $m \cdot \min_{a \leq \mu \leq b} f''(\mu) \leq \sum f''(\mu_i) \leq m \cdot \max_{a \leq \mu \leq b} f''(\mu)$ e pelo TVI existe μ tal que $\sum_{i=1}^m f''(\mu_i) = m f''(\mu)$ com $\mu \in [a \; b]$. SUBSTITUINDO EM (2) TEMOS

$$E_T \leq -\frac{e_m}{12} \cdot m \cdot f''(\mu) \quad \text{com} \quad a \leq \mu \leq b. \qquad (3)$$

sendo "e_m" o "espaçamento máximo", como antes definido. Quanto ao erro de arredondamento, seja $f(x_j) = \bar{f}(x_j) + e_j$ com $|e_j| < \varepsilon$. TEMOS $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^m \frac{\bar{f}(x_i)+\bar{f}(x_{i-1})}{2} \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^m \frac{e_i + e_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) + E_T$, ∴ SENDO O ERRO DE ARREDONDAMENTO DADO POR $E_A = \sum_{i=1}^m \frac{e_i + e_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1})$. Podemos escrever $|E_A| \leq \sum_{i=1}^m \left|\frac{e_i + e_{i-1}}{2}\right| \cdot |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1}{2} \sum (|e_i| + |e_{i-1}|) \cdot |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{\cancel{2}\varepsilon}{\cancel{2}} \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| = \varepsilon \cdot (b-a)$.

ASSIM COMO NO CASO COM ESPAÇAMENTO REGULAR, O ERRO DE ARREDONDAMENTO NÃO É SENSÍVEL AO ESPAÇAMENTO OU AO NÚMERO DE ELEMENTOS DA MALHA.

medio

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

Exercício 1. *Calcule numericamente* $\int_{-2}^{2}\sqrt{x+5}\,dx$ *baseando-se numa malha regular de 3 pontos. Agora, aproxime o integrando por um polinômio* $Q_2(x)$ *(de grau 2) por mínimos quadrados contínuo, e realize a integração através deste polinômio. Qual deu melhor resultado?*

Via interpolação, temos $\int_{-2}^{2}\sqrt{x+5}\,dx \cong \int_{-2}^{2} P_2(x)\,dx \cong \int_{-2}^{2} 2{,}236 + 0{,}2284x - 0{,}01179x^2$

[1]

$= 2{,}236x + \frac{1}{2}0{,}2284x^2 - \frac{1}{3}0{,}01179x^3 \Big|_{-2}^{2} \cong 8{,}8811$

[-0,5] SE USAR TRAPEZIO

ou, pelo formulário, $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \cong \frac{2}{3}\left(f(-2) + 4f(0) + f(2)\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + \sqrt{7}\right) \cong 8{,}8814$

Por aprox. por min.q. contínuo, vamos realizar uma mudança de variável para facilitar: $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \underset{=}{\overset{t=x/2}{}} \int_{-1}^{1} f(2t)\,2\,dt = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{2t+5}\,dt$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & & \\ & \langle t,t\rangle & \\ & & \langle t^2-1/3,\, t^2-1/3\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1,f\rangle \\ \langle t,f\rangle \\ \langle t^2-1/3, f\rangle \end{bmatrix}$$

Fazendo as contas: $\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2$

[1,5] pela formulação

$\langle t,t\rangle = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = +\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{2}{3}$

$\langle t^2-1/3, t^2-1/3\rangle = \int_{-1}^{1}(t^2-1/3)(t^2-1/3)\,dt = \int_{-1}^{1} t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9} = \frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{9} - \frac{1}{9}\right)$

$= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \cong 0{,}1778$

$\langle 1,f\rangle = \int_{-1}^{1}(2t+5)^{1/2}\,dt = \frac{1}{3}(2t+5)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} = \dots \cong 4{,}441$

$\langle t,f\rangle = \int_{-1}^{1} t(2t+5)^{1/2}\,dt = \dots \cong 0{,}3019$

$\langle t^2-1/3, f\rangle = \dots \cong -8{,}317\times 10^{-3}$

$\therefore$ $a_0 \cong 4{,}441/(2) \cong 2{,}221$

$a_1 \cong 0{,}3019/(+2/3) \cong +0{,}4529$

$a_2 \cong -8{,}317\times 10^{-3}/0{,}1778 \cong -0{,}0468$

$Q_2(t) = 2{,}221 + 0{,}4529t - 0{,}0468(t^2-1/3)$

$= 2{,}236 + 0{,}2264x - 0{,}01170x^2$

[0,5] CONSTRUÇÃO DO POL.

Então, $2\int_{-1}^{1}(2{,}236 + 0{,}4529t - 0{,}0468t^2)\,dt = \dots \cong 8{,}8816$

[0,5] compre

O resultado verdadeiro é $\int_{-2}^{2}\sqrt{x+5}\,dx \cong 8{,}8827$. Como se nota, o resultado por aproximação min. q. é melhor. Contudo, é muito mais difícil do que calcular diretamente a integral, de forma que não faz sentido usá-lo.

OBS: -[0,5] POR INTEGRAR LIMITE ERRADO / ESQUECER DE VOLTAR P/ x medio

(2) Estime o erro máximo de f e P_3 do exercício (1) no intervalo [2 3]. Comente.

Sabemos que $f(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(s)}{4!}(x-0)(x-1)(x-2) \times (x-3)$ [0,5]

para algum $s \in [0\ 3]$. Logo, para $x \in [2\ 3]$ temos

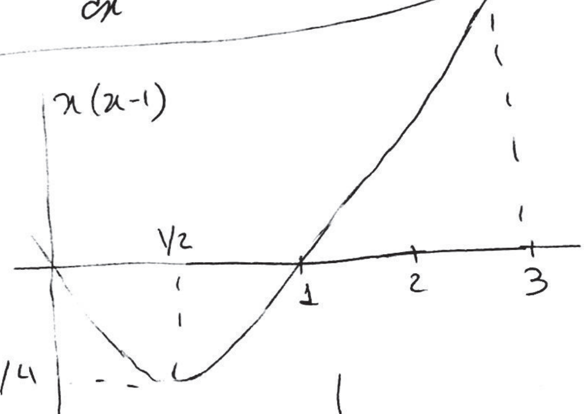
$$|f(x) - P_3(x)| \leq \max_{\substack{0 \leq s \leq 3 \\ 2 \leq x \leq 3}} \left| \frac{f^{(4)}(s)}{24}(x)(x-1)(x-2)(x-3) \right|.$$ [0,5]

(se errar, tirar [1] pois foi enfatizado em aula)

Desenvolvendo separadamente os termos à direita:

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^3}{dx^3}\cos(x) = \frac{d^2}{dx^2}(-\sin(x)) = \frac{d}{dx}(-\cos(x)) = \sin(x)$$

$$\max_{0 \leq s \leq 3} \sin(s) = 1.$$ [0,5]

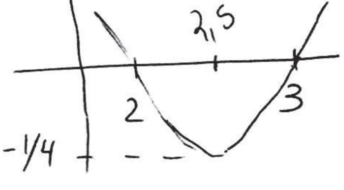


$$\max_{2 \leq x \leq 3} |(x)(x-1)| = 3(3-1) = 6$$

$$\max_{2 \leq x \leq 3} |(x-2)(x-3)| = +1/4$$

isso pode ser feito de diferentes formas

Portanto, podemos ~~escrever~~ escrever: [1,0]



$$|f(x) - P_3(x)| \leq \frac{1}{24} \max_{0 \leq s \leq 3} \sin(s) \cdot \max_{2 \leq x \leq 3} |x(x-1)| \cdot \max_{2 \leq x \leq 3} |(x-2)(x-3)|$$

$$\leq \frac{1}{24} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$ [0,5]

comentários razoávelmente coerentes. [0,3]

Nota-se que o erro é pequeno demais para que se possa comparar com o gráfico esboçado no exercício anterior, de forma conclusiva. Uma coisa que é coerente é que o erro no gráfico parece bem pequeno, compatível com o que se observa no cálculo estimado acima.

4.1.13. as 5 primeiras deriv. de f são limitadas em $[1,5]$ por 2, 3, 6, 12 e 23. Obtenha $f'(3)$ com maior precisão pois. Encontre um limitante p/ erro.

x	$1 = x_0$	$2 = x_1$	$3 = x_2$	$4 = x_3$	$5 = x_4$
$f(x)$	2,4142	2,6734	2,8974	3,0976	3,2804

4/

Sabemos que o termo de erro da fórmula de $(n+1)$ pontos é

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k \neq j} (x_j - x_k) \quad , \quad c/\ \xi \in [1,5]$$

qdo se calcula $f'(x_j)$. Começando com $n=1$ temos:

$$\frac{f^2(\xi)}{2}(x_2 - x_1) \leq \frac{3}{2} \cdot 1 \quad \Big/ \quad \frac{f^2(\xi)}{2}(x_2 - x_3) \leq \frac{3}{2} \cdot (-1)$$

Com $n=2$ temos

$$\frac{f^3(\xi)}{6}(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) \leq \frac{6}{6} \cdot 1 = 1 \quad \Big/ \quad \frac{f^3(\xi)}{6}(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \leq \frac{6}{6} \cdot 2 = 2$$

centrada

Com $n=3$ temos

$$\frac{f^4(\xi)}{24}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \leq \frac{12}{24}\, 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \quad \Big/ \quad \frac{f^4(\xi)}{24}(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \leq \frac{12}{24} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

Com $n=4$ temos

$$\frac{f^5(\xi)}{120}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2-x_4) \leq \frac{23}{120}\, 2 \cdot 1 \cdot -1 \cdot -2 = \frac{4 \cdot 23}{5 \cdot 24} \cong 0,7667$$

CONCLUINDO, A FÓRMULA DE 5 PTOS CENTRADA É A MELHOR, COM LIMITANTE

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

Exercício 1. *Obtenha o polinômio interpolador para a função* $f(x) = \sqrt{x+5}$ *nos pontos* $x = -2, 0, 2$. *Estime o erro máximo de truncamento no intervalo* $[-2, 2]$*; refaça a estimativa considerando apenas o intervalo* $[-1, 1]$.

medio

(1) $$f(x) = \underbrace{f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots + f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}(x-x_0)\cdots(x-x_n)}_{E.t.}$$

$$P_2(x) = \sqrt{3}\frac{(x-0)(x-2)}{(-2-0)(-2-2)} + \sqrt{5}\frac{(x+2)(x-2)}{(+2)(-2)} + \sqrt{7}\frac{(x+2)(x)}{(2+2)(2)} =$$

$$= \ldots \cong 2{,}236 + 0{,}2284\,x - 0{,}01179\,x^2$$

[1,5]

Erro de truncamento em $(-2, 2)$: derivando f, obtemos $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+5)^{-5/2}$,

então $E.t. = \frac{1}{6}\frac{3}{8}(\xi+5)^{-5/2}\cdot(x+2)(x)(x-2) = \frac{3}{6.8}(\xi+5)^{-5/2}\cdot(x^3-4x)$, de forma que

$$\max E.t. = \left|\max_{-2\le\xi\le2}\ \max_{-2\le x\le 2}\ \frac{3}{6.8}(\xi+5)^{-5/2}(x^3-4x)\right|$$

$$\le \frac{3}{6.8}\max_{-2\le\xi\le2}\left|(\xi+5)^{-5/2}\right| \cdot \max_{-2\le x\le2}\left|(x^3-4x)\right|$$

ESTA FC. É DECRESCENTE NO INTERVALO

$3x^2-4=0 \Rightarrow x^2 = 4/3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4/3}$

$\Rightarrow \max \cong 3{,}079$

[1]

$$\le \frac{3}{6.8}\ 0{,}06415\cdot 3{,}080 \cong 0{,}01235$$

"Repetindo" para o intervalo $-1\le x\le 1$ (note que ξ permanece no interv. $[-2,2]$)

$$\max E.T. = \max_{-2\le\xi\le2}\ \max_{-1\le x\le1}\left|\frac{3}{6.8}(\xi+5)^{-5/2}(x^3-4x)\right| \le \ldots \overset{*}{\le} \frac{3}{6.8}\,0{,}06415\cdot 3$$

$$\cong 0{,}01203$$

[0,8]

* OBS: aqui o máx não ocorre em ponto de derivada nula, e sim em $x = \pm 1$.

4.1.26 $\quad \mathcal{E}(t) = L\dfrac{di}{dt} + R.i$

t	1,00	1,01	$\cdots$	1,04	(s)
i	3,10	3,12	$\cdots$	3,24	(A)

$L = 0{,}98\,H$

obtenha aprox. para $\mathcal{E}(1{,}00), \ldots, \mathcal{E}(1{,}04)$.

Esquema $\Rightarrow$ USAR FÓRMULAS DE 5 PONTOS PARA ESTIMAR $\dfrac{di}{dt}$.

Vamos interpolar $i(t)$ nos pontos dados usando o algoritmo que desenvolvemos: lagr(1:.01:1.04, [3.1 3.12 3.14 3.18 3.24]) retorna:

$$i(x) \cong P(x) = -91858.4 + 358719.83x - 525191.67x^2 + 341666.67x^3 - 83333.333x^4$$

$$\frac{di}{dt} \cong \frac{dP(t)}{dt} = 358719.83 - 1050383.3\,t + 1025000\,t^2 - 333333.33\,t^3$$

No ponto $t=1$ temos $\left.\dfrac{di}{dt}\right|_{t=1} \cong 3{,}1666$

$t = 1{,}01 \Rightarrow 1{,}5000$

$t = 1{,}02 \Rightarrow 2{,}8333$

$t = 1{,}03 \Rightarrow 5{,}16667$

$t = 1{,}04 \Rightarrow 6{,}5000$

CONFERINDO
VIA FÓRMULA 5 PTOS CENTRADA.

$$i'(1{,}02) \cong \frac{1}{12.\underbrace{h}_{0{,}01}}\left[f(1) - 8f(1{,}01) + 8f(1{,}03) - f(1{,}04)\right] = \frac{1}{0{,}12}\left[3{,}1 - 8.3{,}12 + \cdots\right] \cong 2{,}8333$$

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

simples

Exercício. Realize interpolação por spline livre para os dados da tabela abaixo.

$h = 0{,}5$

x_i	0,5	1	1.5	2
y_i	0	0,5	1	0,8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \\ 1/2 & 2 & 1/2 & \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [1] \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3(a_2-a_1)/h - 3(a_1-a_0)/h \\ 3(a_3-a_2/h - 3(a_2-a_1)/h \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1]$$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-x_i)^3, \quad [1] \quad x_i \le x \le x_{i+1}. \quad (1).$$

$a_i = f(x_i) \Rightarrow a_0 = 0,\ a_1 = 0{,}5,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0{,}8.$

NOTE QUE

Criamos "um spline a mais", S_3, para poder usar o formulário.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3-3 \\ -1{,}2-3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4{,}2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [1 \text{ (spline "extra")}]$$

LEVA A $c_0 = 0,\ c_3 = 0,\ 2c_1 + 1/2\, c_2 = 0,\ \frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -4.2 \Rightarrow$

$c_1 = -\frac{1}{4}c_2 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}c_2\right) + 2c_2 = \frac{15}{8}c_2 = -4.2 \Rightarrow c_2 = -2{,}24$

$\Rightarrow c_1 = 0{,}56$

$b_0 = \frac{a_1-a_0}{1/2} - \frac{1}{2\cdot 3}(2c_0+c_1) = 1 - \frac{0{,}56}{2\cdot 3} \cong 0{,}90667.$ $b_1 = \frac{a_2-a_1}{1/2} - \frac{1}{2\cdot 3}(2c_1+c_2) \cong 1{,}106667$

$b_2 = \frac{a_3-a_2}{1/2} - \frac{1}{2\cdot 3}(2c_2+c_3) \cong 0{,}346667.$

$d_0 = \frac{c_1-c_0}{3/2} \cong 0{,}373333.$ $d_1 = \frac{c_2-c_1}{3/2} = -1{,}86667.$ $d_2 = \frac{c_3-c_2}{3/2} \cong 1{,}493333.$

Os splines são obtidos substituindo os valores obtidos em (1), com $i = 0, 1, 2$.

conta errada: −0,5

Solução de Exercício - Prof. Eduardo F. Costa

http://www.icmc.usp.br/~efcosta/

medio

Exercício. Para que o polinômio interpolador da função do exercício anterior, com malha regular, tenha erro de truncamento que não ultrapasse 10^{-3}, quantos pontos devemos considerar?

O exercício anterior pede o pol. interpolador para $f(x)=\sqrt{x+2}$ nos pontos $\underset{x_0}{-1};\ \underset{x_1}{-0,5};\ \underset{x_2}{0};\ \underset{x_3}{0,5};\ \underset{x_4}{1}$, o qual satisfaz

$$f(x) = P_4(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}(x-x_0)\cdots(x-x_4), \quad -1\le\xi\le 1. \quad (1)$$

[1]

Mas, $f^{(1)}(x) = \frac{(x+2)^{-1/2}}{2}$, $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^{-3/2}$, $f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(x+2)^{-5/2}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+2)^{-7/2}$ e $f^{(5)}(x) = \frac{7.15}{32}(x+2)^{-9/2}$, cujo ponto de máximo no intervalo [-1 1] é em $x=-1$, levando a $f^{(5)}(-1) = \frac{105}{32}1^{-9/2}$, de forma que de (1) obtemos: [1]

$$|e_T| \le \max_{-1\le x\le 1}|f(x)-P_4(x)| \le \max_{\xi}\left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\right| \max_{x}\left((x-x_0)\cdots(x-x_n)\right) \le \quad (2)$$

$$\le \frac{1}{5!}\left(\max_{-1\le\xi\le 1}|f^{(5)}(\xi)|\right)\cdot\left(\max_{-1\le x\le 1}|x-x_0|\right)\cdots\left(\max_{-1\le x\le 1}|x-x_5|\right)$$

[1]

$$\le \frac{1}{120}\,\frac{105}{32}\cdot 1^{-9/2}\ (2)\cdot(1,5)\cdot(1)\cdot(1,5)\cdot 2 \cong 0,247$$

Aumentando 1 ponto, com malha regular, temos, analogamente:

$$f^{(6)}(x) = \frac{7.15.9}{64}(x+2)^{-11/2} \Rightarrow |e_T| \le \frac{1}{6!}\cdot\frac{7.15.9}{64}\,1^{-11/2}\cdot 2^2\cdot(1,6)^2(1,2)^2 \cong 0,302$$

Com 7 pontos: $|e_T| \le \frac{1}{7!}\,\frac{15.7.9.11}{64.2}\cdot 2^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 \cong 0,318$ ← [0,5]

Com 8 pontos: $|e_T| \le \frac{1}{8!}\,\frac{15.7.9.11.13}{64.2.2}\ 2^2\cdot 1,714^2\cdot 1,429^2\cdot 1,143^2 \cong 0,410$

Analogamente, c/ 9: $|e_T| \le 0,467$, c/ 10: $|e_T| \le 0,623$

Nesta linha de solução, não concluímos sobre o número de pontos necessários.