Lista n.3 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 a) Mostre que se m vetores não nulos $v_1, ..., v_m$ são L.D, então um dos vetores é combinação linear dos procedentes, isto é, $\exists\ k > 1$ tal que $v_k = a_1 v_1 + ... + c_{k-1} v_{k-1}$.

b) Use o item (a) para mostrar que as linhas da matriz escalonada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são L.I.

c) Mostre que as linhas não nulas de uma matriz em forma escalonada são linearmente independentes.

Exercício 2 a) Verifique que o espaço vetorial $M_{2,3}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes 2×3 sobre o corpo $\mathbb{R}$ tem por base o conjunto

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

Qual é uma possível base para $M_{m,n}(\mathbb{R})$?

b) Considere o espaço vetorial $P_n(t)$ dos polinômios de grau menor ou igual a n. Dê uma possível base para $P_n(t)$.

c) Qual é a dimensão de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ e $P_n(t)$?

Exercício 3 Algoritmo de Eliminação

Passo 1: Forme a matriz M cujas colunas são vetores dados;

Passo 2: Reduza M por linhas à forma escalonada;

Passo 3: Para cada coluna c_k na matriz escalonada cujo último elemento não nulo não seja o primeiro não nulo da linha correspondente, elimine o vetor v_k do conjunto de vetores dados;

Passo 4: Destaque os vetores restantes (que correspondem a colunas cujo último elemento não nulo é o primeiro não nulo da linha correspondente): estes vetores restante são uma base para o espaço gerado pelos vetores dados inicialmente.

a) Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 2, 1, -2, 3)$, $v_2 = (2, 5, -1, 3, -2)$, $v_3 = (1, 3, -2, 5, -5)$, $v_4 = (3, 1, 2, -4, 1)$ e $v_5 = (5, 6, 1, -1, -1)$;

Usando o algoritmo da eliminação mostre que $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{W} = 3$;

b) Considere o espaço vetorial $P_n(t)$ de polinômios sobre $\mathbb{R}$. Verifique se os polinômios u, v e w são L.D, onde $u = t^3 + 4t^2 - 2t + 3$, $v = t^3 + 6t^2 - t + 4$ e $w = 3t^3 + 8t^2 - 8t + 7$;

c) Mostre que os vetores $v = (1 + i, 2i)$ e $w = (1, 1 + i)$ em $\mathbb{C}^2$ são L.D sobre o corpo complexo, mas são L.I sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Exercício 4 Sejam U e V espaços vetoriais. Dizemos que U é isomorfo a V, denotamos $U \cong V$, se existe uma correspondência biunívoca entre os elementos de U e V.

a) Se U é um espaço vetorial de dimensão n sobre o corpo K, então $U \cong K^n$;

b) Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -11 \\ 16 & 10 & 9 \end{pmatrix}$. Mostre usando o item (a) que as matrizes são L.I;

c) Seja V o espaço vetorial das matrizes 2×2. Determine se $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ formam uma base de V.

Exercício 5 Considere o corpo complexo $\mathbb{C}$ que contém o corpo real $\mathbb{R}$ que contém o corpo racional $\mathbb{Q}$.

a) Mostre que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{R}$;

b) Mostre que $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.

Exercício 6 Determine se as linhas das seguintes matrizes geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^3$:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 7 & 13 & 17 \end{pmatrix}$.

OBS: A e B tem o mesmo espaço coluna se, e somente se, A^T e B^T tem o mesmo espaço linha.

Exercício 7 Determine um sistema homogêneo cujo conjunto solução é um subespaço W gerado por:

$$\{(1, -2, 0), (1, -1, -1)\}.$$

Exercício 8 a) Suponha que U e W sejam subespaços quadridimensionais distintos de um espaço vetorial V, onde dim V=6. Ache as possíveis dimensões de $U \cap W$.

b) Considere as seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} U &= < (1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1) > \\ W &= < (1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3) > \end{aligned}$$

Encontre a dimensão de $U + W$ e a dimensão de $U \cap W$.

Exercício 9 Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

a) Determine as possíveis dimensões de W;

b Para cada valor da dimensão de W forneça um exemplo de espaço W.

Exercício 10 Seja V o espaço vetorial de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que $f, g, h \in V$ são L.I, onde $f(t) =$ sen(t), $g(t) = \cos(t)$ e $h(t) = t$.

Exercício 11 Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$

$$\begin{aligned} U &= <(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9)> \\ W &= <(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)> \end{aligned}$$

Determine uma base e a dimensão dos subespaços $U+W$ e $U \cap W$.

Exercício 12 Consideremos as bases do $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} S &= \{u_1=(1,2),u_2=(3,5)\} \\ E &= \{e_1=(1,0),e_2=(0,1)\} \end{aligned}$$

a) Encontre a matriz P de mudança da base S para a base E;

b) Encontre a matriz Q de mudança da base E para a base S;

c) Calcule o produto PQ.

Exercício 13 Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{u_1=(1,-2),u_2=(3,-4)\} \\ S_2 &= \{v_1=(1,3),v_2=(3,8)\} \end{aligned}$$

a) Ache as coordenadas de um vetor arbitrário $v=(a,b)$ em $\mathbb{R}^2$ em relação a base $S_1=\{u_1,u_2\}$;

b) Ache a matriz P de mudança de base de S_1 para S_2;

c) Ache as coordenadas de um vetor arbitrário $v=(a,b)$ em $\mathbb{R}^2$ em relação a base $S_2=\{v_1,v_2\}$;

d) Ache a matriz Q de mudança de base de S_2 para S_1;

e) Verifique que $Q=P^{-1}$;

f) Mostre que $P[v]_{S_1}=[v]_{S_2}$ para qualquer vetor $v=(a,b)$;

g) Mostre que $P^{-1}[v]_{S_2}=[v]_{S_1}$ para qualquer vetor $v=(a,b)$;

Exercício 14 Suponha que os vetores abaixo formem uma base S de K^n.

$$v_1=(a_{11},...,a_{n1}),\ v_2=(a_{12},...,a_{n2}),\ e\ v_1=(a_{1n},...,a_{nn}).$$

Seja $E=\{e_i\}_{i=1}^n$ a base canônica de K^n, isto é, para cada $j=1,..,n$ o vetor e_j tem j-ésima compoente igual a 1 e as outras iguais a 0.

Mostre que a matriz de mudança de base da base canônica para a base S é a matriz P cujas colunas são os vetores v_1, v_2,...,v_n respectivamente.

Exercício 15 Considere as bases

$$S=\{u_1=(1,2,0),u_2=(1,3,2),u_3=(0,1,3)\}$$

$$T=\{v_1=(1,0,1),u_2=(2,1,1),u_3=(3,1,-1)\}$$

do espaço $\mathbb{R}^3$. Determine:

a) A matriz de mudança de base P da base T para a base S;

b) A matriz Q de mudança de base da base S para a base T.

c) as coordenadas, nas duas bases, dos vetores $z_1 = (1, 1, 1)$ e $z_2 = (5, 2, 0)$

Exercício 16 Seja E a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e B a base obtida rodando de $\frac{\Pi}{4}$ no sentido anti-horário os vetores de E.

a) Ache as duas matrizes de mudança de base de uma base na outra.

b) calcule as coordenadas do ponto $A(5, 6)$ nas duas bases.

Exercício 17 Considere a base $S = \{1, i\}$ e $S' = \{1 + i, 1 + 2i\}$ do corpo complexo $\mathbb{C}$ sobre o corpo real $\mathbb{R}$.

a) Determine a matriz P de mudança de base da base S para a base S';

b) A matriz Q de mudança de base da base S' para a base S;

c) As coordenadas, nas duas bases, dos vetores $z_1 = 2i$, $z_2 = 3 + i$, $z_3 = -1 - 2i$, $z_4 = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.