Lista n.5 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Considere $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V sobre o corpo $\mathbb{K}$. Sejam $\phi_1, ..., \phi_n \in V'$ os funcionais lineares definidos por

$$\phi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se i = j} \\ \\ 0 \text{ se i} \neq \text{j.} \end{cases}$$

Mostre que $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ é uma base de V' (espaço dual de V).

Exercício 2 Considere a seguinte base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}= \{v_1 = (2, 1), v_2 = (3, 1)\}$. Determine a base dual $\mathcal{B}'$=$\{\phi_1, \phi_2\}$.

Exercício 3 Sejam $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V e $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ a base dual de V'. Mostre que para todo vetor $u \in V$ temos

$$u = \phi_1(u)v_1 + ... + \phi_n(u)v_n$$

e para todo funcional linear $\gamma \in V'$ obtemos

$$\gamma = \gamma(v_1)\phi_1 + \gamma(v_2)\phi_2 + ... + \gamma(v_n)\phi_n.$$

Exercício 4 Sejam $\{v_1, ..., v_n\}$, $\{w_1, ..., w_n\}$ bases de V e $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ e $\{\sigma_1, ..., \sigma_n\}$ as respectivas bases duais de V'. Suponha que P seja a matriz de mudança de base de $\{v_i\}$ para a base $\{w_i\}$. Mostre que $(P^{-1})^T$ é a matriz de mudança de base de $\{\phi_i\}$ para a base $\{\sigma_i\}$.

Exercício 5 Considere V o espaço vetorial de polinômios sobre $\mathbb{R}$ de grau ≤ 1, isto é,

$$V = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam $\phi_1 : V \to \mathbb{R}$ e $\phi_2 : V \to \mathbb{R}$ tais que

$$\phi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt \; e \; \phi_2(f(t)) = \int_0^2 f(t)dt$$

Determine a base $\{v_1, v_2\}$ de V pela qual $\{\phi_1, \phi_2\}$ é a base dual.

Exercício 6 Suponha que V seja um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que se $v \in V$, $v \neq 0$, então existe $\phi \in V'$ tal que $\phi(v) \neq 0$.

Exercício 7 Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$F(x, y, z) = (2x, y + z), \; G(x, y, z) = (x - z, y) \; e \; H(x, y) = (y, x).$$

Estabeleça, quando for possível, as fórmulas que definem as aplicações:
a) $F + G$; b) $3F$; c) $2F - 5G$; d) $H \circ F$ e) $F \circ H$.

Exercício 8 Consideremos as aplicações lineares $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$F(x, y, z) = (x + y + z, y + z), \; G(x, y, z) = (2x + z, x + z) \; e \; H(x, y, z) = (2y, x).$$

Mostre que F, G e H são L.I em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Exercício 9 Sejam S e T operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$S(x,y) = (y,x) \text{ e } T(x,y) = (0,x).$$

Estabeleça as fórmulas que definam os operadores:
a) $S+T$; b) $2S-3T$; c) ST; d) TS; e) S^2; f) T^2.
(ST significa $S \circ T$, S^2 significa $S \circ S$).

Exercício 10 Seja o operador linear T em $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$.

a) Mostre que T é invertível.

b) Estabeleça as fórmulas para: i) T^{-1}; ii) T^2 e iii) T^{-2}.

Exercício 11 Seja V de fimensão finita e T um operador linear em V para o qual $TS = I$, para algum operador S em V.

a) Mostre que T é invertível.

b) Mostre que $S = T^{-1}$.

c) Dê um exemplo mostrando que as afirmações acima não são necessáriamente válidas se V tiver dimensão infinita.

Exercício 12 Dê exemplos de dois operadores lineares em $\mathbb{R}^2$, S e T tais que $TS = 0$ e $T^2 = T$, mas que $ST \neq 0$.
(Sugestão: antes de escolher as leis, escolha núcleo e imagem das duas funções).

Exercício 13 Considere o operador linear T em $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x,y,z) = (2x+4y, 3x+6y)$.
a) T é sobrejetora? é injetora?
b) Estabeleça uma formula para $T^{-1}(\{(z,w)\})$.
c) Calcule $T^{-1}(\{(8,12)\})$; c) $T^{-1}(\{(1,2)\})$.

Exercício 14 Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base de V e $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2\}$ uma base de U. Suponhamos que $T : V \to U$ seja linear e também que

$$\begin{array}{rcccc} T(v_1) & = & a_1u_1 & + & a_2u_2 \\ T(v_2) & = & b_1u_1 & + & b_2u_2 \\ T(v_3) & = & c_1u_1 & + & c_2u_2 \end{array}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Mostre que para qualquer $v \in V$

$$A[v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'},$$

onde os vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são vetores colunas.

Exercício 15 Seja k um escalar não nulo. Mostre que uma aplicação linear T é injetora se, e somente, kT é injetora. Conclua que T é injetora se, e somente, se $-T$ é injetora.

Exercício 16 Considere P um operador linear em V para o qual $P^2 = P$ (Tal operador é chamado de Projeção). Sejam U a imagem de P e W o núcleo. Mostre que:

a) se $u \in U$, então $P(u) = u$, isto é, P é a aplicação identidade em U;

b) se $P \neq I$, então P não é injetora, isto é, $\exists\, v \neq 0$ tal que $P(v) = 0$;

c) $V = U \oplus W$.

Exercício 17 Encontre, quando possível, a dimensão dos espaços:
a) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$; b) $\mathcal{L}(V, \mathbb{R}^2)$; c) $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$; d) $\mathcal{L}(\mathbb{C}^3, \mathbb{R}^2)$; e) $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$; f) $\mathcal{L}(V, V)$;
onde $V = (\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}}$, enquanto os espaços $\mathbb{R}^n$ são considerados sobre o corpo $\mathbb{R}$ e os $\mathbb{C}^n$ são considerados sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Exercício 18 Sejam $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$F(x, y, z) = (y, x + z),\ G(x, y, z) = (2z, x - y)\ e\ H(x, y) = (y, 2x).$$

Estabeleça as fórmulas que definem as aplicações:
a) $H \circ F$ e $F \circ H$; b) $F \circ H$ e $G \circ H$; c) $H \circ (F + G)$ e $H \circ F + H \circ G$ d) $H \circ F$ e) $F \circ H$.

Exercício 19 Sejam $F : V \to V$ e $G : U \to V$ lineares.
a) Mostre que se F e G são injetoras, então $G \circ F$ é injetora.
b) Dê um exemplo em que $G \circ F$ é injetora, mas G não é.

Exercício 20 Considere os seguintes sistemas lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

a) Determine os sistemas homogêneos correspondentes.

b) Determine os operadores lineares associados a cada sistema homogêneo obtido em a).

c) Discuta a existência de soluções e a forma do conjunto das soluções dos sistemas, utilizando a teoria dos operadores lineares.

Exercício 21 Verifique se os seguintes espaços são isomorfos

a) $W = < (1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1) >$ e $V = \mathbb{R}^3$;

b) $W = < 1 + t, t + t^2, t^2 + t^3, ..., t^{n-1} + t^n >$ e $V = P_n(t)$;

c) $W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
e $V = \mathbb{R}^6$.

Exercício 22 Seja G o operador linear em $\mathbb{R}^3$ definido por $G(x, y, z) = (2y + z, x + y, 3x)$.

a) Ache a representação matricial de G em relação à base

$$S = \{w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 0), w_3 = (1, 0, 0)\}.$$

b) Verifique que $[G][v] = [G(v)]$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 23 Cada um dos conjuntos

$$\{1, t, e^t, te^t\} \text{ e } \{e^{3t}, te^{3t}, t^2e^{3t}\}$$

é base de um (diferente) espaço vetorial de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja D o operador diferencial neste espaço, isto é, $Df = \dfrac{df}{dt}$. Encontre a matriz de D nos dois casos.

Exercício 24 Consideremos a base $S = \{(1,0),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Seja $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $L(1,0) = (6,4)$ e $L(1,1) = (1,5)$. Determine a representação matricial de L em relação à base S.

Exercício 25 Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (4x - y, 2x + y)$ e consideremos as seguintes bases para $\mathbb{R}^2$

$$E = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \text{ e } S = \{u_1 = (1,3), u_2 = (2,5)\}.$$

a) Determine a matriz P de mudança de base de E para S, a matriz Q de mudança de base de S de volta para E e verifique que $Q = P^{-1}$.

b) Ache a matriz A que representa F na base E, a matriz B que representa F na base S e verifique que $A = P^{-1}BP$.

Exercício 26 Seja F a aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ descrita pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix}.$$

a) Determine o valor de k para que F seja injetiva;

b) Determine o valor de k para que F seja sobrejetiva;

c) Quando F não é sobrejetora determine uma base e a dimensão de núcleo e imagem.

Exercício 27 Considere $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por

$$T(x,y,z,w) = (x + ky + 2z + w, 3y - kz, x + 2y + 3z + w).$$

Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ encontre uma base e a dimensão dos espaços $\mathcal{N}(T)$ e $Im(T)$.

Gabarito

Exercício 2 $\{\phi_1(x,y) = -x + 3y,\ \phi_2(x,y) = x - 2y\}$.
Exercício 5 $\{2 - 2t,\ -\frac{1}{2} + t\}$ é a base de V que é dual a base $\{\phi_1, \phi_2\}$.
Exercício 13 c) $T^{-1}(\{(8,12)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 4 - 2y\}$; $T^{-1}(\{(1,2)\}) = \emptyset$.
Exercício 23 A matriz de D nas bases dadas são: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

respectivamente.
Exercício 24 A representação matricial de L em relação a base S é dada por $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.
Exercício 25 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $P = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.