Lista n.7 - SMA-304 Álgebra Linear
Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 No espaço vetorial de todos os polinômios reais, determine se

$$\langle p, q\rangle = p(1)q(1)$$

é um produto interno, e, em caso negativo, indique quais dos axiomas da definição de produto interno são violados.

Exercício 2 No espaço vetorial P_n de todos os polinômios reais de grau menor ou igual a n definimos o produto

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{n}{k})g(\frac{n}{k}),$$

onde $f, g \in P_n$.

a) Prove que $\langle f, g\rangle$ é um produto interno sobre P_n;

b) Calcule $\langle f, g\rangle$ quando $f(t) = t$ e $g(t) = at + b$;

c) Se $f(t) = t$, encontre todos os polinômios g ortogonais a f.

Exercício 3 Sejam V e W espaços vetorias sobre $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot\rangle_W$ um produto interno sobre W e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetora.

a) Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot\rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$\langle v_1, v_2\rangle_V = \langle T(v_1), T(v_2)\rangle_W ,$$

onde $v_1, v_2 \in V$ é um produto interno sobre V;

b) Seja $V = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ e considere $T \in \mathcal{L}(V, V)$ dada por $T(f)(x) = xf(x)$, onde $x \in [0, 1]$ e $f \in V$. Considerando o produto interno usual em V mostre que

$$\langle f, g\rangle_V := \int_0^1 t^2 f(t)g(t)dt,$$

define um produto interno em V.

Exercício 4 Seja V um espaço com produto interno e seja $\|\cdot\|$ a norma correspondente. Mostre que as seguintes afirmações são verdadeiras:

a) $\|v\| = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

b) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$;

c) Desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle v_1, v_2\rangle| \leq \|v_1\| \, \|v_2\|$;

d) Desigualdade triangular: $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$, onde $v_1, v_2 \in V$.

Exercício 5 Sejam V um espaço vetorial real com produto interno.

a) Mostre que se $u, v \in V - \{0\}$, então existe um único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\langle u, v\rangle = \|u\| \, \|v\| \cos(\theta).$$

b) Determine o ângulo entre $f(t) = t + e^t$ e $g(t) = t^2 - \cos(t)$, onde $< f, g >= \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Exercício 6 Seja V um espaço vetorial com produto interno e considere A e B subconjuntos de V. Mostre que;

a) $A^\perp$ é um subspaço de V;

b) se $A \subset B$, então $B^\perp \subset A^\perp$;

c) se A, B são subespaços de V, então $(A + B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$;

d) se A, B são subespaços de V, então $A \cap A^\perp = \{0\}$.

Exercício 7 Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno e A um subconjunto de V. Se $0 \notin A$ e A é ortogonal, então A é linearmente independente.

Exercício 8 Seja $P_n(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Considere o subespaço de $P_n(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $W = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4\rangle$. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar polinômios p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 que são ortonormais e geram W.

Exercício 9 Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ o espaço dos polinômios com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Fixar uma base B em V e calcular uma matriz A com a propriedade que $\langle f, g\rangle = v_f^t A v_g$ para podo $f, g \in V$, sendo $v_f = [f]_B$ (vetor coluna das coordenadas do polinômio f na base B).

Exercício 10 Seja $S = \{\frac{1}{\sqrt{2}},\ cos(x),\ \cos(2x),\ \cos(3x)\}$ um conjunto de vetores em $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$.

a) Mostre que S é um conjunto ortonormal com o seguinte produto interno

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx;$$

b) Escreva a função $\cos^3(x)$ como combinação linear dos elementos de S;

c) Use o item a) para encontrar valores das integrais:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)dx \text{ e } \int_{-\pi}^{\pi} \cos^3(x)\cos(2x)dx.$$

Exercício 11 Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ e $v = (2, 4, 7, 2, -1)$.
a)Determine uma base do complemento ortogonal $W^\perp$ de W.
b) calcule as projeções ortogonais do vetor $u = (1, 1, 1, 1, 1)$ sobre W e $W^\perp$

Exercício 12 Seja $\langle u_1, u_2, ..., u_n\rangle$ uma base ortogonal para V.

a) Mostre que para todo $v \in V$,

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \ldots + k_n u_n,$$

onde

$$k_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}, \ i = 1, 2, \ldots, n;$$

b) Seja w um vetor não nulo em V. Para todo $v \in V$ mostre que o número

$$c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}.$$

é o único escalar tal que $\tilde{v} = v - cw$ é ortogonal a w;

c) Dê um interpretação geométrica para o escalar c.

Exercício 13 Suponha que S consiste dos seguintes vetores em $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, 1, 0, -1); \ u_2 = (1, 2, 1, 3); \ u_3 = (1, 1, -9, 2); \ u_4 = (16, -13, 1, 3).$$

a) Mostre que S é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$;

b) Determine as coordenadas de um vetor arbitrário $v = (a, b, c, d)$ em $\mathbb{R}^4$ em relação à base S. (Sugestão: Use o exercício anterior)

Exercício 14 Encontre uma matriz ortogonal P cuja primeira linha é $u = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

Exercício 15 Seja $C = \begin{pmatrix} 11 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine:

a) o polinômio característico $p(t)$ de C;

b) os autovalores de C;

c) um conjunto máximo S de autovetores ortogonais não-nulos de C;

d) uma matriz ortogonal P tal que $P^{-1}CP$ seja diagonal.

Exercício 16 Seja A uma matriz real simétrica e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$ ($\mathbb{R}^n$ com produto escalar euclidiano).

a) Verifique que (por ser A simétrica), o polinômio característico $p(\lambda)$ de T é um produto de polinômios lineares sobre $\mathbb{R}$ e então T tem um autovetor v;

b) Mostre que se $W =< v >$ então $T(W^\perp) \subseteq W^\perp$ e $T|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ é operador linear autoadjunto.

c) Conclua que T é diagonalizável em $\mathbb{R}$ respeito a uma base ortonormal.

Exercício 17 Verifique se as matrizes abaixo são diagonalizáveis. Em caso afirmativo determine a base (ortonomal se possível) que diagonaliza a matriz A.

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $A \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; e) $A \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

Exercício 18 Seja T um operador auto-adjunto em V. Conside u e v autovetores de T pertencentes a autovalores distintos. Mostre que u e v são ortogonais.

Exercício 19 Seja λ um autovalor de um operador linear T em V. Mostre que:

a) Se T é auto-adjunto, então λ é real;

b) Se $< T(u), v >= - < u, T(v) >$ para todo $u, v \in V$, então λ é um imaginário puro.