Lista n.3 - SLC-592 Cálculo Diferencial (2010)

Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Para o ε dado, calcule um $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x tal que $0 < |x - p| < \delta$.

a) $f(x) = x + 3$; $L = 5$; $p = 2$; $\varepsilon = 0.01$;

b) $f(x) = -3x + 1$; $L = -2$; $p = 1$; $\varepsilon = 0.01$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $L = -1$; $p = 0$; $\varepsilon = 1$;

Exercício 2 Demonstre, utilizando a definição de limite, que:

(a) $\lim_{x\to 4} x^2 = 16$ **(b)** $\lim_{x\to -1}(11x + 5) = -6$ **(c)** $\lim_{x\to\sqrt{2}} 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Exercício 3 Demonstre, utilizando a definição, que:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto c$ é contínua para qualquer $c \in \mathbb{R}$, isto é, mostre que $\lim_{x\to p} c = c,\ \forall p \in \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ é contínua, isto é, mostre que $\lim_{x\to p} x = p,\ \forall p \in \mathbb{R}$.

Exercício 4 Dê um exemplo de uma função definida em $\mathbb{R}$, de maneira que seja contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ exceto nos inteiros.

Exercício 5 Determinar os valores x nos quais a função dada é contínua, e os nos quais é descontínua:

$(a)\ f(x) = x^2(x+3)^2$ $(b)\ g(x) = \cos\left(\dfrac{x}{x-3}\right)$ $(c)\ h(x) = \dfrac{x^3+7}{x^2-4}$

$(d)\ f(x) = \begin{cases} 3x-1 & se\ x < 2 \\ 4-x^2 & se\ x \geq 2 \end{cases}$ $(e)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & se\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$ $(f)\ h(x) = \dfrac{|x+4|}{x+4}$

$(g)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-3} & se\ x \neq 3 \\ 0 & se\ x = 3 \end{cases}$ $(h)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & se\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & se\ x > 1 \end{cases}$ $(i)\ h(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

Exercício 6 Dê o valor, caso exista, que a função deveria assumir no ponto dado para ser contínua:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x-4}$ em $p = 4$ **(b)** $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x}$ em $p = 0$ **(c)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ em $p = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-81}{x-9}, & x \neq 9 \\ 10, & x = 9 \end{cases}$ em $p = 9$ **(e)** $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$ em $p = 1$

(f) $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x-5}$ em $p = 5$

Exercício 7 Calcule o limite, se existir:

(a) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ **(b)** $\lim_{h\to 0} \dfrac{(h-5)^2-25}{h}$ **(c)** $\lim_{t\to 9} \dfrac{9-t}{3-\sqrt{t}}$ **(d)** $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

Exercício 8 Calcule os limites abaixo, justificando cada passagem:

(a) $\lim_{x\to 17} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{17}}{x-17}$ **(b)** $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5+x}-3}{\sqrt{5-x}-1}$ **(c)** $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ **(d)** $\lim_{x\to 1} \sin\left(\pi\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\right)$

Exercício 9 Determine L para que a função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{11}}{\sqrt{x+11}-\sqrt{22}}, & x \neq 11 \\ L & x = 11 \end{cases}$

seja contínua em $p = 11$.

Exercício 10 A função $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x \neq -1 \\ 2 & x = -1 \end{cases}$ é contínua em $p = -1$? E em $p = 0$? Justifique.

Exercício 11 É falsa ou verdadeira a seguinte afirmação

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } p$$

Justifique.

Exercício 12 Calcule:

(a) $\lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3}$ **(b)** $\lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3}$ **(c)** $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

(d) $\lim_{x\to 5} \frac{|x-1|}{x-1}$ **(e)** $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$

Exercício 13 Encontrar (se for possível) L e M de forma que a função dada seja contínua:

$$(a)\, f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x<0 \\ L & se\ x=0 \\ 1+Mx & se\ x>0 \end{cases} \qquad (b)\, g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & se\ x<1 \\ L & se\ x=1 \\ x-2 & se\ x>1 \end{cases}$$

$$(c)\, f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x>1 \\ Lx+M & se\ x\in[0,1] \\ e^x & se\ x<0 \end{cases} \qquad (d)\, g(x) = \begin{cases} L(x+1)^2 & se\ x\le 0 \\ \sin(x)+M & se\ x\in(0,\pi] \\ \cos(x) & se\ x>\pi \end{cases}$$

Exercício 14 Seja f uma função contínua no ponto 3, e $f(3)=10$. Mostre que existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in D_f$,

$$3-\delta < x < 3+\delta \Rightarrow f(x) > 9.$$

Exercício 15 Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$ e suponha que existe $M>0$ tal que $|f(x)-f(p)| \le M|x-p|$ para todo x. Prove que f é contínua em p.

Exercício 16 Considere as funções $f(x) = \begin{cases} e^x\ , & \text{para } x\neq\pi, \\ 1, & \text{para } x=\pi. \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} \sin(x)\ , & \text{para } x\ge\pi, \\ x\cos(x), & \text{para } x<\pi. \end{cases}$

Calcule (justificando!!)

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to\pi} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to 0} g(x)$ **d)** $\lim_{x\to\pi} g(x)$

e) f é contínua? g é contínua? (justifique)

Exercício 17 Sabendo que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ calcule

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{f(2x)}{x}$ **c)** $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^3)}{x^2}$ **d)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos(x))}{\cos(x)}$

Gabarito

Exercício 5: $b)$ contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, $g)$ contínua em $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, descontínua em 3, $h)$ contínua em $\mathbb{R}$.

Exercício 6 **(a)** 8 **(b)** -1 **(c)** não existe **(d)** 18 **(e)** 1 **(f)** não existe

Exercício 8 **(a)** $\frac{1}{3\sqrt[3]{289}}$ **(b)** $-\frac{1}{3}$

Exercício 9 $\sqrt{2}$.

Exercício 10 f é contínua em $p=0$, mas não é contínua em $p=-1$.

Exercício 12: **(a)** 1 **(b)** -1 **(c)** não existe **(d)** 1 **(e)** 0

Exercício 13: $a)$ $L=1$, $b)$ $\nexists L$.