Lista n.5 - SLC-592 Cálculo Diferencial (2010)

Prof. Eugenio Massa

Exercício 1 Para o M dado, calcule um $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ para todo x no domínio da função, tal que $0 < |x - p| < \delta$.
a) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$; $M = 100$; $p = -3$;
b) $f(x) = -\log_{10}(x)$; $M = 100$; $p = 0$;

Exercício 2 Para o M dado, calcule um H tal que $f(x) > M$ para todo $x > H$.
a) $f(x) = x^3$; $M = 100$;
b) $f(x) = \log_{10}(x)$; $M = 4$;

Exercício 3 Para o ε dado, calcule um $H > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo $x > H$.
a) $f(x) = \frac{x^2}{(x+3)^2}$; $L = 1$; $\varepsilon = 0.1$;
b) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$; $L = 0$; $\varepsilon = 0.0001$;

Exercício 4 Demonstre, utilizando a definição, que:
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-100}{10-x} = -3$ **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-6} = 0$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-2x+1 = +\infty$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 10^-} \dfrac{x^2-1}{x-10} = -\infty$

Exercício 5 Calcule:
(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^6-7x+3}{4x^6+x+5}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^4+1}{x^5+6x+1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x-1}}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+7}$ **(f)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}\right)$

Exercício 6 Calcule:
(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3-x}{5+3x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x-\sqrt{x^2+3}\right)$ **(c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-2}\right)$
(d) $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{3x+2}{x^2+x}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+4}{x^2+x}$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x-6}{x^2+4x-5}$
(g) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$ **(h)** $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{7x^2-5}{1-x^2}$ **(i)** $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^4-x^3}$

Exercício 7 Calcule:
(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x)}-1}{x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{e^x-1}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^4}-1}{x^2}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{e^{\cos(x)-1}-1}$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{\cos(x)}{1+\pi^2}$ **(f)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$ **(g)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{x^2}}$ **(h)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin(x))^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$

Exercício 8 Encontre todas as assíntotas (horizontais, verticais ou oblíquas) das seguintes funções:
(a) $\dfrac{x^2+x}{x-1}$ **(b)** $\dfrac{x^5+x^4+1}{2x^4+1}$ **(c)** $\dfrac{x^5+x^4+1}{x^3-1}$ **(d)** $\dfrac{2x+3}{x-2}$

(e) $\sqrt[3]{2+8x^2}$ **(f)** $\sqrt[3]{2+8x^3}$ **(g)** $e^{\frac{1}{x}}$

Exercícios sobre as propriedades das funções contínuas

Exercício 9 Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Mostre que f admite pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

Exercício 10 Mostre que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 11 *(*)* Seja $f : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ uma função contínua. Mostre que existe $x_0 \in [0,\ 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

NOTA: Os exercícios marcados com (*) serão feitos na sala de aula, estão na lista para que depois vocês refaçam sozinhos.

Gabarito

Exercício 5: **(a)** $\frac{1}{2}$ **(b)** 0 **(c)** $\frac{1}{6}$ **(d)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **(e)** 0 (f) 0

Exercício 6: **(a)** $-\frac{1}{3}$ **(b)** $+\infty$ **(c)** $\frac{1}{2}$ **(d)** $+\infty$ **(e)** $+\infty$ **(f)** $-\infty$ **(g)** $+\infty$ **(h)** $+\infty$ **(i)** $-\infty$

Exercício 7: **(a)** 1 **(b)** 1 **(c)** 0 **(d)** $-2/3$ **(e)** 0 **(f)** e

Exercício 8: **(a)** AV $x = 1$, AO $y = x + 2$; **(b)** AO $y = (x + 1)/2$; **(c)** AV $x = 1$; **(d)** AV $x = 2$, AH $y = 2$; **(e)** não tem; **(f)** AO $y = 2x$; **(h)** AV $x = 0$, AH $y = 1$;