10ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aulas n.20,21,22 dia 2-6-2011

1. Exercícios do Hildebrando: pag 177 n 4,5, 6 e pag 178 n 8, 12.

2. Usando um funcional da forma $V(x,y) = x^2 + ay^2$ prove a estabilidade assintótica da origem para o sistema
$$\begin{cases} x' = -x - 2y^2 \\ y' = xy - y^3 \end{cases} .$$

3. Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = -y + x(r - z) \\ z' = xy - bz \end{cases}$$
onde σ, r, b são parâmetros positivos.
- Determine os pontos de equilíbrio.
- Mostre que existe r_0 tal que para $r \in (0, r_0)$ a origem é o único ponto de equilíbrio.
- Usando a função de Liapunov $V(x,y,z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ mostre que, para $r \in (0, r_0)$, a origem é globalmente assintoticamente estável.
- Para $r \neq r_0$, encontre os autovalores do sistema linearizado na origem e determine as dimensões da variedade estável e instável.

4. Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = y + xf(x,y) \\ y' = -x + yf(x,y) \end{cases}$$
com f de classe $\mathcal{C}^1$. Considerando a função de Liapunov $V(x,y) = x^2 + y^2$, encontre condições sobre f para que a origem seja, respectivamente, estável, instável, assintoticamente estável.

5. Dado $\varepsilon > 0$, mostre que a origem é assintoticamente estável para o sistema
$$\begin{cases} x' = y - \varepsilon(x - x^3/3) \\ y' = -x \end{cases}$$
e que a bola aberta $B_{\sqrt{3}}(0)$ está na região de atração da origem.

6. Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = -y - x^3 \\ y' = x^5 \end{cases}$$
- Mostre primeiro que a origem é estável tentando com os seguintes funcionais: $V_1 = x^2 + y^2$, $V_2 = x^2 + axy + by^2$, $V_3 = x^{2\alpha} + by^{2\beta}$.
- Mostre que a origem é assintoticamente estável usando o teroema de Liapunov, adicionando um termo da forma $\gamma x^\alpha y^\beta$ ao funcional V_3.
- Mostre que a estabilidade assintótica pode ser deduzida também sem o termo adicional acima, pelo teorema de La Salle.

7. Usando um apropriado funcional e o teorema de Cetaev, prove a instabilidade da origem para o sistema

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} .$$

8. Usando o teorema de La Salle mostre que a sol zero de $x'' + x^2 x' + g(x)$ com g contínua, $xg(x) > 0$ se $x \neq 0$ e $\int_0^x g(s)ds \to \infty$ para $x \to \pm\infty$, é globalmente assintoticamente estável.

9. Considere a equação $x'' + x' + x - x^2 = 0$.
   - Encontre os pontos de equilíbrio e diga se são estáveis, assintoticamente estáveis ou instáveis.
   - Procure uma região que seja atraída pelo ponto de equilíbrio estável usando o teorema de La Salle e como função de Liapunov a energia total.

10. (Ainda sobre sistemas gradiente: veja lista 2 e 4).
    Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, considere o Sistema Gradiente

    $$y' = -\nabla F(y), \; y(0) = y_0$$

    Mostre que F pode ser usada para aplicar os teoremas de estabilidade e de instabilidade de Liapunov e mostrar que os mínimos de F são soluções assintoticamente estáveis enquanto os pontos críticos que não são mínimos são instáveis.

ENTREGAR, até segunda dia 13 exercícios 3 e 6.