1ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.2, dia 16-3-2011

1. a) Mostre que a chamada **Equação de Riccati**

$$y' + p(t)y + r(t)y^2 = q(t)$$

com $p, q, r \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ pode ser reduzida a uma equação de Bernoulli, pondo $y = u + w$ sendo w uma solução particular.

b) Chute uma solução para

$$y' + (1 - 2t)y + y^2 = 2t$$

e calcule todas as soluções pelo método acima.

2. Diga se cada função a seguir é Lipschitz em y uniformemente com respeito a t, no domínio indicado. Se for, encontre uma constante de Lipschitz, se não for, diga se é localmente Lipschitz (em y uniformemente com respeito a t).

a) $t|y|$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

b) ty^2 em $[a, b] \times \mathbb{R}$

c) $1/y$, $y \geq 1$

d) $\sqrt[3]{sin(y)}$, $y \in \mathbb{R}$

e) $\sqrt{sin(y) + 2}$, $y \in \mathbb{R}$

3. Encontre todas as soluções das seguintes equações:

a) $y' = 2ty + t$.

b) $y' = -ycos(t) + sin(2t)/2$.

c) $y' = (y + t)/t$, com $t > 0$.

d) $y' = -y + t\sqrt{y}$

e) $y' = 2t\sqrt{1 - y^2}$

f) $y' = (y^2 - 1)cos(t)$

g) $y' = (\alpha - \beta y)y$ com $\alpha, \beta > 0$; depois considere o caso particular $\alpha = \beta = 1$

h) $y' = -\dfrac{1 - t^2 y}{t^2(y - t)}$. [sugestão: multiplique em cima e em baixo por uma oportuna função $g(t)$].

4. Considere os problemas de Cauchy

$$y_n' = f_n(t, y_n), \ y_n(t_n) = p_n \,,$$

onde $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ são funções continuas, $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, \ |y - p| \leq b\}$, $f_n \to f$ uniformemente em Ω, $t_n \to t_0$, $p_n \to p$.

Prove que se y_n são soluções definidas em $[t_0 - a, t_0 + a]$, existe uma subsequência que converge uniformemente a uma solução do problema $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = p$.

ENTREGAR, até segunda dia 28, ex 3 pontos (e) e (h) .