4ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.8, dia 6-4-2011

1. Determine $\omega(p)$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$ para os sistemas
$$\begin{cases} x' = -y + xr^2\sin(\pi/r) \\ y' = x + yr^2\sin(\pi/r), \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} x' = y(y^2+(x^2-1)^2) + x(1-r^2) \\ y' = -x(y^2+(x^2-1)^2) + y(1-r^2), \end{cases}$$
onde $r = x^2 + y^2$. [Sugestâo: estude $xx' + yy'$]

2. Considere as equações dos exercícios anteriores, as vistas na aula e as seguintes:
a) $y' = \sin(y)$, b) $y' = \sin^2(y)$, c) $y' = -y$ em $\mathbb{R}^n$,
d) $x' = x,\ y' = -y$, e) $x' = -y,\ y' = x,\ z' = -z$.
Indique os conjuntos ω-limite, α-limite, os conjuntos invariantes, os conjuntos minimais e eventuais atratores e atratores globais.

3. Mostre que se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ e C é uma curva fechada tal que $f \cdot n_{est} < 0$ ao longo dela, então existe um ponto de equilíbrio na região dentro da curva. Acontece o mesmo se $f \cdot n_{est} > 0$? Justifique.

4. Mostre que se $f : \widehat{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ com $div f \neq 0$ em todo ponto de $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\Omega}$ é simplesmente conexo, então não existem órbitas periódicas.

5. (Ainda sobre sistemas gradiente: veja lista 2).
Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, considere o **Sistema Gradiente gerado por** F
$$y' = -\nabla F(y),\ y(0) = y_0$$
e denote por $\phi_{y_0}(t)$ a (única) solução maximal, definida em $(\omega^-_{y_0}, \omega^+_{y_0})$.
- Mostre que não existem órbitas periódicas (não constantes).
- Mostre que se $\omega^+_{y_0} = \infty$ e $\gamma^+(y_0)$ é limitada, então o conjunto ω-limite $\omega(y_0)$ é não vazio e contém apenas pontos críticos. Além disso, se os pontos críticos são todos isolados, então $\omega(y_0)$ contém apenas um ponto.
- Encontre uma condição necessária e suficiente para dizer se um sistema $y' = f(y)$ é de tipo gradiente .

6. (Sistemas Hamiltonianos).
Dada uma função $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, considere o **Sistema Hamiltoniano gerado por** H
$$\begin{cases} x' = H_y(x,y)\,, \\ y' = -H_x(x,y) \end{cases}$$
e denote por $\phi_{y_0}(t)$ a (única) solução maximal, definida em $(\omega^-_{y_0}, \omega^+_{y_0})$.
- Mostre que H é constante ao longo das soluções
- Seja C uma componente conexa e limitada de um conjunto de nível de H que não contenha pontos críticos de H. Mostre que C é uma órbita periódica.
- Mostre que $x'' + sin(x) = 0$ pode ser escrita em forma de sistema Hamiltoniano: calcule H e descreva o retrato de fase.
- Encontre uma condição necessária e suficiente para dizer se um sistema 2x2 $y' = f(y)$ é Hamiltoniano.

ENTREGAR, até segunda dia 18, ex 5.