5ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aula n.9, dia 11-4-2011

NOTA: quando não especificado consideraremos campos f de classe $\mathcal{C}^1$.

1. a) Mostre que em $\mathbb{R}^2$ os conjuntos minimais e compactos são apenas pontos singulares e órbitas periódicas.
   b) Isso é verdade em $\mathbb{R}^n$ se $n > 2$?
   Sugestão: procure um exemplo em $\mathbb{R}^3$ no qual o conjunto minimal é um toro que não contém órbitas periódicas nem pontos singulares, mas é o conjunto ω-limite de todas as órbitas contidas nele.

2. a) Mostre que se $f : \widehat{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial $\mathcal{C}^1$ com $div f \neq 0$ em todo ponto de $\widehat{\Omega}$ e $\widehat{\Omega}$ é duplamente conexo, então existe no máximo uma órbita periódica.
   b) Mostre com um exemplo que a existência de tal órbita não é necessária.
   c) Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x' = -y - x + (x^2 + 2y^2)x \\ y' = x - y + (x^2 + 2y^2)y, \end{cases}$$
   possui exatamente uma solução periódica (use Poincaré Bendixon e o ponto (a)).

3. Mostre que o sistema
$$\begin{cases} x' = 2x - x^5 - y^4 x \\ y' = y - y^3 - yx^2, \end{cases}$$
   não possui órbitas periódicas [Sugestão: mostre que as singularidades estão apenas nos eixos coordenados, em seguida estude o campo ao longo deles e deduza o resultado]

4. Mostre que, em $\mathbb{R}^2$, se $\gamma^+(p) \cap \omega(p) \neq \emptyset$ então $\gamma(p)$ é uma órbita periódica ou um ponto singular.

ENTREGAR, até quarta dia 27, ex 2.