8ª Lista de Exercícios de SMA5802 Equações diferenciais ordinárias

Eugenio Massa

Aulas n.13,14,17,18, dia 18-5-2011

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e T-periódica: encontre uma mudança de variável T-periódica que leve a equação $y' = f(t)y$ na equação $z' = mz$ sendo $m = \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds$.

2. Calcule os expoentes característicos de $y' = (A + B_m(t))y$ onde $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, e B_m é $2m\pi$-periódica com $B_m(t) = 0$ se $t \in [0, 2m\pi - \pi/2)$ e $B_m(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ se $t \in [2m\pi - \pi/2, 2m\pi)$.

3. Exercícios do Hildebrando: pág 173 n 2,3, pág 174 n 6.

4. Analise a estabilidade da origem para o sistema
$$\begin{cases} x' = xf(x,y) \\ y' = yg(x,y) \end{cases}$$
onde f, g são regulares, definidas em $\mathbb{R}^2$ e estritamente negativas.

5. Dê condições sobre o parâmetro a para que toda solução de $y' = Ay$ tenda a zero quando $t \to \infty$: $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Considere o sistema
$$\begin{cases} x' = x - x^2 - xy \\ y' = x/2 - 3xy/4\,. \end{cases}$$
- Determine todos os pontos de equilíbrio.
- Desenhe o retrato de fase do problema linearizado em cada um desses pontos.

7. Sejam P_A e P_B matrizes principais de $y' = A(t)y$ e $z' = B(t)z$ com A, B contínuas. Mostre a continuidade com respeito à matriz no seguinte sentido: fixada a matriz A, para todo $\varepsilon > 0$ e $t_0 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\int_0^{t_0} |A(s) - B(s)|ds < \delta$ então $|X_A(t) - X_B(t)| < \varepsilon$ em $[0, t_0]$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, com $f(0) = 0$. Suponha que exista uma solução não trivial ϕ de $y' = f(y)$ tal que $\phi \to 0$ para $t \to -\infty$: mostre que a origem é instável.

9. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Seja ϕ uma solução periódica de $y' = f(y)$. Mostre que se ϕ não é constante então não pode ser assintóticamente estável.

10. Considere $x^{(3)} + x'' + x' + ax = 0$: para quais valores de a a solução nula é assintóticamente estável?

11. Discuta o tipo de estabilidade (normal, uniforme, assintótica ou uniformemente assintótica) ou a instabilidade da origem para as seguintes equações:
$y' = \cos(t)y\,,$ $\quad y' = (\cos(t) - 1)y\,,$ $\quad y' = (\sin(t) + t\cos(t))y\,,$
$y' = (\sin(t) - 1 + t\cos(t))y\,,$ $\quad y' = (\sin(t) - 2 + t\cos(t))y\,.$

ENTREGAR, até segunda dia 7 exercícios 1 e 8