10ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Eq. da onda em dimensão 1

1. Considere a equação $u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = 0$.
   a) Mostre que a função $\sin(kx - \omega t)$ é solução com $k = \pm\omega$ se e só se $\lambda = 0$.
   b) Mostre que se $\lambda \neq 0$, a função $\sin(kx - \omega t)$ é solução só se $\omega = \pm\sqrt{k^2 + \lambda}$.
   Este fenômeno se chama dispersão: o sinal $\sin(kx)$ viaja com velocidade 1 se $\lambda = 0$ mas com velocidade que depende de k se $\lambda \neq 0$ (uma sobreposição de senos viaja inalterada se $\lambda = 0$ mas muda de forma se $\lambda \neq 0$)

2. Considere a equação $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \lambda u = 0$.
   a) Mostre que se a solução regular $u(\cdot, t)$ tem suporte compacto para todo t, então a energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2 + \lambda u^2$ satisfaz $E'(t) = -\alpha \int_{\mathbb{R}} u_t^2$ (sugestão, vai precisar fazer uma integração por partes).
   b) Encontre a solução explicita quando $\lambda = \alpha^2/4$ (sugestão: mude incógnita para eliminar o termo u_t).
   Este fenômeno se chama dissipação: o termo u_t dissipa energia e a solução decai.

3. a) Construa a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & em\ [0,2] \times [0,\infty) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0 \end{cases}$$

   usando a relação $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ onde $ABCD$ é um quadrilátero de lados característicos.
   b) Desenhe a solução para diferentes valores de t.
   c) Calcule a energia $E(t) = \int_0^2 u_t^2 + u_x^2$ e explique por que é constante.

4. a) Calcule, para todo ponto do domínio com $t < 1 + x$, a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & em\ [-1,1] \times [0,\infty) \\ u(x,0) = 1 - x^2,\ u_t(x,0) = 0 \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

   usando a relação $u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$ onde $ABCD$ é um quadrilátero de lados característicos (corda de violão com posição inicial $1 - x^2$ e velocidade inicial nula)
   b) Verifique que ao longo da reta $x + t = 1$ a solução calculada é contínua e derivável, mas a derivada segunda salta.
   c) Por que isso acontece?