11ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Eq. da onda em dimensão maior

1. a) Diga como deve ser o vetor $a \in \mathbb{R}^n$ para que a função $u(x,t) = F(a \cdot x - t)$ (solução de tipo onda plana) satisfaça a equação da onda em $\mathbb{R}^n$, onde $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

   b) Qual relação deve ter entre as condições iniciais $\phi(x) = u(x,0)$ e $\psi(x) = u_t(x,0)$ para que a solução seja dessa forma?

   c) Encontre todas as soluções de tipo onda plana com $\phi(x) = c \cdot x + b$ ($c \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}$).

2. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior n, e seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ satisfazendo $u_{tt} - \Delta u = 0\,,\ \ em\ \Omega$; defina $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla_x u|^2$. Mostre que se vale a condição à borda de Dirichlet ($u(x,t) = 0$ para todo $t > 0$ e $x \in \partial\Omega$) ou de Neumann ($\frac{\partial}{\partial n}u(x,t) = 0$ para todo $t > 0$ e $x \in \partial\Omega$) então E(t)é constante.

   Deduza um resultado de unicidade.

3. Considere a equação $u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t = 0$ com $\alpha \geq 0$ e o problema de Cauchy em $t = 0$.

   a) Mostre a unicidade de solução do problema de Cauchy mostrando que a solução com dados nulos em $B_t(x)$ é nula no cone do passado do ponto (x,t).

   b) Deduza que a velocidade de propagação é finita e então o suporte de $u(\cdot,t)$ é compacto se os dados do problema de Cauchy em $t = 0$ são a suporte compacto.

   c) Mostre que para dados a suporte compacto a energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla_x u|^2$ é não crescente.

4. Considere a equação $u_{tt} - \Delta u + q(x)u = 0$ sendo $q \geq 0$ (onda em meios não homogêneos) e o problema de Cauchy em $t = 0$.

   a) Defina uma noção de energia apropriada e mostre a unicidade de solução do problema de Cauchy mostrando que a solução com dados nulos em $B_t(x)$ é nula no cone do passado do ponto (x,t).

   b) Deduza que a velocidade de propagação é finita e então o suporte de $u(\cdot,t)$ é compacto se os dados do problema de Cauchy em $t = 0$ são a suporte compacto.

   c) Mostre que para dados a suporte compacto a energia definida é conservada.