**12ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais**

*Eugenio Massa*

**Eq. da onda, fórmulas de resolução**

1. Resolva $u_{tt} = c^2 u_{xx},\ u(x,0) = e^{-x^2},\ u_t(x,0) = 0$. Esboce o gráfico de $u(x,t)$ para diferentes valores de t.

2. Mostre que a solução da equação da onda em 3 dimensões espaciais com dados regulares a suporto compacto satisfaz $u(x,t) \leq C/t$ para alguma constante $C$.

3. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0\,, \\ u(x,0) = \phi(x)\,, \quad u_t(x,0) = \psi(x)\,. \end{cases} \tag{1}$$

a) No caso $\phi(x) = \chi_{B_1(0)}(x)$, $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3$, encontre a solução dada pela fórmula de resolução para o caso radial, e esboce $u(r,1/2), u(r,1), u(r,2)$.
Calcule $u(0,t)$, usando a fórmula para a solução do problema em dimensão 3: note que a solução tem uma singularidade.
Deduza o andamento qualitativo de $u(r,t)$ para um $r$ perto de 0 e para um $r$ muito grande, usando a solução do problema em dimensão 3.
b) Faça o mesmo com $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = \chi_{B_1(0)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$; note que $u(0,t)$ tem uma descontinuidade.
c) Calcule $u(0,t)$ nos dois casos acima, quando $x \in \mathbb{R}^2$ (sugestão: use a formula com a integral adimensional em $B_1$).
d) Calcule a solução e $u(0,t)$ nos dois casos acima, quando $x \in \mathbb{R}^1$.
e) Compare u(0,t) nos 6 casos.

4. a) Para o problema (1), calcule $u(0,t)$ para as condições iniciais radiais $\cos(r)$, $\frac{\cos(r)}{r}$, $\frac{\cos(r)}{1+r}$, $\frac{\cos(r)}{(1+r)^2}$, tanto no lugar da $\phi$ que da $\psi$ (separadamente), nos casos em dimensão 1 e 3. Comente os resultados.
b) Escreva a fórmula geral para $u(0,t)$ em função dos dados radiais $\phi(r)$ e $\psi(r)$, no caso em dimensão 3.

5. Encontre a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)\,, \\ u(x,0) = 0\,, \qquad\qquad u_t(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{2}$$

com $f(x,t) = \sin(x) + \sin(t)$. (Sugestão: resolva separadamente com $\sin(x)$ e $\sin(t)$).

6. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \\ u(x,0) = x^2\,, \quad u_t(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{3}$$

Se definirmos $E_R(t) = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]dx$, verifique que para todo $R > 0$ esta energia é crescente. (OBS: os dados não tem suporte compacto).

7. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = \chi_{B_1(0)}(x)\,, \\ u(x,0) = 0\,, \qquad\qquad u_t(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

a) Calcule $u(0,t)$ para o caso em 1 e 3 variáveis espaciais.
b) Esboce o gráfico qualitativo de $u(0,t)$ para o caso em 2 variáveis espaciais.

# 1 Resumo fórmulas onda

(por favor me avisem de todos os erros que acharem!!!)

Fórmula de D' Alambert (onda 1d)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+t) + \phi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi\right) = \fint_{\partial B_t(x)} \phi \;+\; t \fint_{B_t(x)} \psi \tag{5}$$

Fórmula de Poisson (onda 2d)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dB(y)\right) + \left(t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dB(y)\right)\right\} && (6) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{B_1(x)} \frac{\phi(x+t\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}dB(\eta)\right) + \left(t \fint_{B_1(x)} \frac{\psi(x+t\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}}dB(\eta)\right)\right\} && (7) \\ &= \frac{t}{2} \fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + t\psi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}dB(y) && (8) \end{aligned}$$

Fórmula de Kirchhiff (onda 3d)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B_t(x)} \phi(y)dS(y)\right) + \left(t \fint_{\partial B_t(x)} \psi(y)dS(y)\right) && (9) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B_1(x)} \phi(x+t\eta)dS(\eta)\right) + \left(t \fint_{\partial B_1(x)} \psi(x+t\eta)dS(\eta)\right) && (10) \\ &= \fint_{\partial B_t(x)} \left[\phi(y) + t\psi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x)\right] dS(y) && (11) \end{aligned}$$

Onda 3d radial simétrica ($\phi$ e $\psi$ pares)

$$u(\rho,t) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{t}{\rho}\right)\phi(\rho+t) + \left(1-\frac{t}{\rho}\right)\phi(\rho-t) + \frac{1}{\rho}\int_{\rho-t}^{\rho+t} \xi\psi(\xi)d\xi\right) \tag{12}$$