13ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Laplaciano, L-G, P. D. Máximo

1. Calcule a solução do problema de Dirichlet no circulo de raio 1 em $\mathbb{R}^2$, com as condições $u(1,\theta) = \sin^2(\theta)$ e em seguida com $u(1,\theta) = \sin(\theta)$. Use coordenadas polares mas depois ponha a solução nas variáveis x, y e verifique a equação.
   Repita considerando o problema de Neumann com condições $u_r(1,\theta) = \cos^2(\theta) - 1/2$ e com condições $u_r(1,\theta) = \sin(\theta)$.
   Repita considerando o problema de Robin com condições $(u_r + u)(1,\theta) = 1 + \sin(\theta)$ e com condições $(u_r - u)(1,\theta) = 1 + \sin(\theta)$. São ambos resolúveis?

2. Use a identidade de Lagrange-Green para mostrar unicidade de eventuais soluções do problema de Robin
$$\begin{cases} -\Delta u = f(x) & em\ \Omega \\ u_n + \alpha u = g & em\ \partial\Omega \end{cases}$$
   quando $\alpha > 0$.

3. Calcule a solução do problema de Dirichlet no domínio exterior dado por $\mathbb{R}^2$ menos o circulo de raio 1 com as condições $u(1,\theta) = 1 + \sin(3\theta)$ mais a condição u limitada (sugestão: lembre o que foi feito no círculo... agora a origem não está no dimínio!)

4. Se u è uma função harmônica num conjunto simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$, mostre que existe uma (única a menos de uma constante) função harmônica v satisfazendo $v_x = -u_y$ e $v_y = u_x$. Mostre que $u + iv$ è analítica complexa vista como função de $x + iy$.

5. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ soluçao de $-\Delta u + b(x) \cdot \nabla u = c(x)u$ no domínio limitado e regular Ω. Mostre (adaptando um princípio de máximo) que se $c < 0$ e $u|_{\partial\Omega} = 0$, então $u \equiv 0$. Mostre com um exemplo simples que isso poderia ser falso com $c > 0$.
   (Sugestão: mostre que um máximo não pode ser positivo e um mínimo não pode ser negativo).

6. Use o resultado anterior para mostrar unicidade de solução $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ para o problema de Dirichlet
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f(x) & em\ \Omega \\ u = g & em\ \partial\Omega \end{cases}$$
   quando $\lambda < 0$.

7. Mostre o princípio de máximo fraco para o operador <u>elíptico</u> $Lu = -\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + b \cdot \nabla u$ com $a_1 > 0$. Mostre que o mesmo vale se os coeficientes são funções contínuas em $\overline{\Omega}$.
   (Sugestão: mostre o caso $Lu > 0$ e em seguida considere $u + \varepsilon v$ com $v = exp(M|x - x_0|^2))$ sendo M grande e $x_0 \notin \overline{\Omega}$)