14ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Laplaciano, sol. fundamentais

1. Calcule a função de Green e o Núcleo de Poisson em dimensão um, isto é, para $\Omega = (0,1)$. Use elas para calcular a solução de $u'' = x$, $u(0) = 1$, $u(1) = 1$.

2. a) Escreva a formula $u(p) = \int_\Omega \psi(x-p)(-\Delta u(x)) + \int_{\partial\Omega}[\psi(x-p)\nabla u(x) - \nabla\psi(x-p)u(x)] \cdot n$ no caso em dimensão 1.
   b) Verifique a validade da fórmula para o caso $u(x) = x^2$ em $[0,1]$.

3. a) Calcule as soluções fundamentais para $Lu = -u'' - cu$, para todo $c \in \mathbb{R}$.
   b) Calcule a função de Green para o intervalo $[0,\pi]$ para este operador: para quais valores de c ela existe?
   c) Para $c = 0$, verifique que $u(p) = \int_0^\pi G(x,p)dx$ é realmente a solução de $-u'' = 1$ em $(0,\pi)$ com condições de Dirichlet zero.
   d) Calcule a função de Neumann no intervalo $[0,\pi]$ para o operador L: para quais valores de c ela existe? (lembrete: a função de Neumann è o análogo da função de Green, para resolver o problema de Neumann).

4. Resolva os seguintes problemas, procurando por soluções radiais (observe que $\rho^2/2n$ é solução particular de $\psi''(r) + (n-1)\psi'(r)/r = 1$).
   a) $[-\Delta u = 0$ em $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, $u = a$ em $\partial B_1(0)$, $u = b$ em $\partial B_2(0)]$.
   b) $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_1(0)]$.
   c) $[-\Delta u = 1$ em $B_2(0) \setminus \overline{B_1(0)}$, $u = a$ em $\partial B_1(0)$, $u = b$ em $\partial B_2(0)]$.
   d) $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$, $u_n = 0$ em $\partial B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_\varepsilon(0)]$. O que acontece se $\varepsilon \to 0$? [deixe as equações indicadas no caso geral e resolva apenas para $n = 3$]

5. Encontre a função de Green para o primeiro quadrante em $\mathbb{R}^2$

6. Resolva o problema $[-\Delta u = 1$ em $B_1(0)$, $u = 0$ em $\partial B_1(0)]$, em dimensão 2, na forma $u = v + w$, sendo:
   a) v uma solução de $-\Delta v = 1$ que dependa só de x
   b) w uma solução de $[-\Delta w = 0$ em $B_1(0)$, $w = -v$ em $\partial B_1(0)]$ (use separação de variáveis em coordenadas polares).

7. Considere o problema
$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & em\ Q := (-1,1) \times (-1,1), \\ u = f & em\ \partial Q\,, \end{cases}$$
   onde $f = x^4$ no segmento $[-1,1] \times \{1\}$ e vale 1 nos outros lados.
   Existe uma solução $\mathcal{C}^2(Q) \cup C^0(\overline{Q})$? (Justifique).

8. Procure uma função barreira na origem para o conjunto Ω formado pelos primeiros três quadrantes de $\mathbb{R}^2$. Sugestão: procure ela em coordenadas polares, na forma $\rho^\alpha f(\theta)$. (observação: a origem então é um ponto regular, no sentido de Perron, para a fronteira de Ω, apesar de não estar satisfeita a condição da esfera exterior!)