15ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Eq. do calor

1. a) Considere uma varinha correspondente à semireta $x \geq 0$: encontre uma fórmula para uma solução da equação do calor homogênea com condição inicial $u(x,0) = g(x)$ (para $x \geq 0$) contínua e limitada e $u(0,t) = 0$ para $t \geq 0$ (temperatura do extremo fixada).
   b) Considere o caso com condição $u_x(0,t) = 0$ para $t > 0$ (extremo isolado). Precisa assumir $g'(0) = 0$?

2. Mostre que se $u \in \mathcal{C}^{1t,2x}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+1})$ então
   $\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u\phi_t + u\Delta\phi + f\phi = 0$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ é equivalente a $\begin{cases} u_t - \Delta u = f & em\ \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & em\ \mathbb{R}^n \end{cases}$

3. (Dissipação) Encontre uma solução para $\begin{cases} u_t - u_{xx} + bu = 0 & em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R} \end{cases}$ para $b > 0$ (sugestão: ponha $u = e^{-bt}v$).

4. (Convecção) Encontre uma solução para $\begin{cases} u_t - u_{xx} + cu_x = 0 & em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R} \end{cases}$ para $b > 0$ (sugestão: ponha $y = x - ct$).

5. Calcule uma solução de $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R} \end{cases}$ em função de $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2}$, quando $g = \chi_{(0,\infty)}$ e quando $g = \chi_{(-1,1)}$. (Observação: $\phi \to \pm 1/2$ se $t \to \pm\infty$). Esboce os gráficos para t fixados e para x fixados.

6. Mostre que se $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ é limitada então a solução $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)g(y)dy$ satisfaz:
   a) Se vale também $g \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$ então $u(x,t)$ tende a zero uniformemente quando $t \to \infty$.
   b) Se vale também $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $u(x,t)$ tende a zero uniformemente quando $t \to \infty$.

7. Mostre que se $u_i(y,t)$, $i = 1,..n$ são soluções da equação do calor em uma variável y, então $u(x,t) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i,t)$ é solução da equação do calor em $\mathbb{R}^n$.

8. a) Mostre que o princípio de máximo para a equação do calor num conjunto $U_T = \Omega \times (0,T)$, vale também para o operador $u_t - \Delta u + cu$ se $c \geq 0$ e a solução considerada satisfaz $u \geq 0$. (Sugestão: tente imitar os passos da prova vista na aula e assuma se precisar T pequeno, depois mostre que pode estender a qualquer T).
   b) Forneça um contraexemplo do ponto (a), onde a solução considerada não satisfaz $u \geq 0$.
   c) Mostre que o princípio de máximo para a equação do calor não pode valer para a equação da onda, construindo um exemplo onde uma solução da equação da onda possui máximo no interior de U_T.

9. Considere o problema de Riemann para a equação de conservação com viscosidade

$$\begin{cases} u_t + cu_x = \mu u_{xx} \\ u(x,0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x \geq 0 \end{cases} \end{cases}.$$

a) Mude de variável para transformar a equação na equação do calor.
b) Calcule a solução em função de $\phi(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2}$.
c) verifique que a solução obtida é $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ (compare o resultado com a solução via características quando $\mu = 0$).