

2ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Mudança de variáveis

1. Encontre a variedade característica dos seguintes operadores lineares:

a) $Lu = a \cdot \nabla u : a \in \mathbb{R}^n$,

b) $Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} : a, b, c \in \mathbb{R}$,

a) $Lu = u_y - u_{xx} + u_{xxx}$.

2. Escreva as seguintes equações com respeito às novas variáveis $z = x + y$, $w = x - y$:

a) $u_{xx} - u_{yy} = 1$, b) $u_{xx} + u_{yy} = 1$, c) $u_y - u_{xx} = u^2$, d) $u_x + u_y = u$.

Repita usando a rotação $z = x \cos(t) + y \sin(t)$, $w = -x \sin(t) + y \cos(t)$.

(observe o resultado para o ponto b).

3. Escreva a equação $u_{xx} + u_{yy} = 1$, no semiplano $x > 0$, com respeito às novas variáveis $z = x^2 + y$, $w = y$.

[sol: $((4(z - w) + 1)u_{zz} + u_{ww} + 2u_{zw} + 2u_z = 1)$]

Escreva $\partial_x \partial_y$ nas novas variáveis, verificando que o resultado não muda trocando a ordem das derivações.

4. Dados o vetor unitário $v \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$, escreva a fórmula para a derivada k-ésima na direção v : ∂_v^k .

[Sugestão: use uma mudança de variáveis ortonormal que leve v no vetor e_1 e calcule o novo operador de derivação].