

4ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Sistemas equivalentes e Cauchy -Kowalevski.

1. Ponha a equação genérica $F(x, y, u, u_x) = u_y$ com condições $u(x, 0) = \phi(x)$ em forma de sistema $Y_y = A(x, y, Y)Y_x + B(x, y, Y)$ em 3 incógnitas: $Y = (u, p, q)^t$. Escreva explicitamente o sistema resultante nos casos
 - a) $3u_x + 2u_y = u^2$
 - b) $xyu_x + (y + 1)^2u_y = \sin(u)$
 - c) $uu_x + u_y = u^2$
 - d) $|\nabla u|^2 = 1$
 - e) $u_y = yu + uu_x$
 - f) No caso b, junte mais duas equações para pôr o sistema na forma $Y_y = A(Y)Y_x$
2. Use séries de potências para tentar resolver o problema $u_t = u_{xx}$ com condição $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$ em vizinhança da origem: mostre que não existe solução analítica, verificando que a serie resultante não converge para nenhum $t \neq 0$. (De fato, a reta $t = 0$ é característica, então o teorema de Cauchy - Kowalevski não garante existência)
3. Mostre que o problema
$$\begin{cases} u_t = x + y + t + |u_x - u_y| \\ u(x, y, 0) = 0 \end{cases}$$
possui exatamente uma solução analítica (apesar da equação não ser analítica).
4. Use séries de potências para resolver o problema $u_{xx} - u_{yy} + u = 0$ com condições $u(x, 0) = e^x$ e $u_y(x, 0) = 0$. (Observe que a solução pode ser encontrada também por separação de variáveis).