5ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Problemas de primeira ordem.

1. a1) Verifique que o problema è não característico e calcule a solução:

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2 \\ u(x,0) = h(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

a2) Trocando a condição por $u(x,-x) = x$, mostre que a solução explode na hipérbole $y^2 = x^2 - 4$.

b) Verifique que o problema è não característico e calcule a solução:

$$\begin{cases} xu_x + yu_y + u_z = u \\ u(x,y,0) = h(x,y) \end{cases}$$

c) Considere o seguinte problema em $\{x > 0\}$: verifique que o problema è não característico e calcule a solução

$$\begin{cases} -yu_x + xu_y = u \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Represente a solução desenhando as projeções características e descrevendo a solução ao longo delas.
Existe uma solução definida em todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?
Existiria se a equação fosse $-yu_x + xu_y = 0$? Qual seria a condição inicial adequada?

2. a) Verifique que o problema è não característico e calcule a solução (via características) do problema

$$\begin{cases} xuu_x - u_y = 0 \\ u(x,0) = x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Represente a solução desenhando as projeções características e descrevendo a solução ao longo delas (sol implícita $x = ue^{-uy}$).
b) Repita com a condição $u(x,0) = 1$.
c) Repita com a equação $xuu_x - u_y = -1$ e a condição $u(x,0) = 0$.

3. Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x - u_y = -u \\ u(x,0) = f(x)\,, \end{cases}$$

a) Discuta existência e unicidade da solução.
b) Resolva o problema pelo método das características, até onde der.
c) Termine a resolução no caso $f(x) = x$: escreva a solução explicitamente e desenhe as características.
d) Qual é o maior conjunto de existência da solução do problema? Explique.

4. (feito em aula)
Considere o problema

$$\begin{cases} x^2u_x + y^2u_y = u^2 \\ u(s,2s) = 1 \qquad s > 0 \end{cases}$$

a) verifique que o problema não é característico.

b) calcule a solução $u(x, y)$ usando o método das características.

c) observando as equações paramétricas $x_s(t)$ $y_s(t)$ e $u_s(t)$ deduza, em função de s, em qual vizinhança de 0 pode variar o parâmetro t e em conseqüência em quais intervalos variam x, y e u; desenhe as projeções características que encontram a linha dos dados de Cauchy.

d) encontre as projeções características ao longo das quais u explode e as nas quais u fica limitada.

e) desenhe a maior região onde a solução obtida pelas características pode ser estendida.

5. (feito em aula)

   Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ u(s, s) = 0 \end{cases}$$

   a) verifique que o problema não é característico.

   b) calcule a solução $u(x, y)$ usando o método das características.

   c) desenhe as projeções características.

   d) desenhe a maior região onde a solução obtida das características pode ser estendida.

   e) repita com a condição u(s,s)= 1

6. Estude a solução do problema $uu_x + u_y = 1$ com condição $u(x, x) = x/2$ usando características.