

6ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Problemas de primeira ordem totalmente não lineares.

1. a) Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_x^2 + u_y^2 = u^2 \\ u(x, 0) = 1 \end{cases} .$$

Escreva o sistema (de 5 equações) característico com as condições iniciais apropriadas e o resolva.

b) Repita com a condição inicial $u(\cos(s), \sin(s)) = 1$.

c) Calcule a solução conoidal pelo ponto $x_0, y_0, u = 1$.

d) Como è o cone de monge no ponto x_0, y_0, u_0 ?

[sol a) $\exp(\pm y)$, b) $\exp(\pm(1 - \sqrt{x^2 + y^2}))$ e c) $\exp(\pm(\pm\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}))$]

2. Considere a equação diferencial $u_x u_y = 1/2$ com dado de Cauchy $u(0, y) = \phi(y)$.

a) Ponha as condições sobre ϕ para que o problema não seja característico.

b) Escreva o sistema (de cinco EDOs) das características junto com as condições iniciais apropriadas.

c) Resolva o sistema para ϕ genérica (deixe tudo em função dos parâmetros). Qual é a forma das projeções características? e das curvas características?

d) Deduza do ponto (c) a solução explícita $u(x, y)$ para o caso $\phi(y) = y$.

e) Desenhe as projeções características perto da reta $x = 0$, quando $\phi(y) = y^3 + y$. A solução poderá ser definida em todo \mathbb{R}^2 ? (Justifique).

3. Mostre que qualquer solução da equação $u_y = u_x^3$ que seja regular em todo \mathbb{R}^2 é da forma $u(x, y) = a + bx + cy$ (sugestão: escreva o sistema (de 5 equações) característico).