

7ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Eq. de conservação.

1. a) Verifique que a função $u(x, t) = |x - t|$ satisfaz a formulação integral do problema

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 \\ u(x, 0) = |x| \end{cases},$$

isto é, $\frac{d}{dt} \left(\int_a^b u(x, t) dx \right) = u(a) - u(b)$ para todos $a < b$ e $t > 0$.

- b) Verifique que a função $u(x, t) = |x - 2t|$ não satisfaz a formulação integral.

2. Verifique que a função $u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ x/t & t < x < 2t \\ 2 & x > 2t \end{cases}$ satisfaz a formulação integral do o problema

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \end{cases}.$$

3. Construa a “solução integral entrópica” para o problema de conservação $u_t + (u^2/2)_x = 0$ com condição inicial $u(x, 0) = 0$ para $x \in [-1, 0] \cup [1, \infty)$ e $u(x, 0) = 1$ nos outros pontos. (Em particular, encontre a trajetória dos dois choques e diga o que acontece quando estes se encontram).

Desenhe a solução aos tempos $t = 1, 2, 4, 8, 10$.

4. Escreva a formula explicita para a solução $u(x, t)$ do problema $u_t + b \cdot \nabla_x u + cu = 0$ $u(x, 0) = g(x)$

5. a) Verifique que $u_\varepsilon(x, t) = \left[\tanh \left(-\frac{x - At}{2\varepsilon} \right) + A \right]$ é solução da equação

$$u_t + u u_x = \varepsilon u_{xx}$$

com $\varepsilon > 0$.

- b) Calcule o limite pontual de u_ε quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

- c) $v_\varepsilon(x, t) = \left[\tanh \left(\frac{x - At}{2\varepsilon} \right) + A \right]$ também é solução da equação?

- d) Comente, com respeito ao caso $\varepsilon = 0$, relação de Rankine-Hugoniot e condição de entropia.