8^{a} Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Classificação.

1. Classifique as seguintes equações e encontre, de cada uma, a mudança de coordenadas que a leva na forma canônica.
   a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y$
   b) $4u_{xx} + 12u_{xy} + 5u_{yy} = 6u_x - u_y^2$
   c) $u_{xx} + (1 + x^2)u_{yy} = 0$
   d) para os pontos (a) e (c) encontre a equação completa nas novas variáveis.

2. Encontre as regiões do plano onde a seguinte equação è, respectivamente, hiperbólica elíptica ou parabólica: $(1 + x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 6u_x - u_y^2$

3. Mostre que a equação no plano de segunda ordem linear a coeficientes constantes mais geral, que seja invariante por rotações, è $a(u_{xx} + u_{yy}) + bu = c$.

4. Calcule as características da equação $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$. Encontre uma mudança de variáveis que ponha a equação na forma canônica correspondente, e verifique como sao os termos de grau máximo depois da mudança.

5. Classifique as seguintes equações em 3 variáveis.
   a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u_x - u_y - u_z$
   b) $yu_{xx} + u_{yy} + 2zu_{zy} = 0$
   c)$14u_{xx} + u_{yy} + z^2u_{zz} + 2zu_{zy} = 0$

6. Mostre que qualquer equação linear e homogênea a coeficientes constantes de segunda ordem em n variáveis, pode ser posta, com oportuna mudança de variáveis,
   - na forma $\Delta_x u - \Delta_y u + \lambda u = 0$ se não for parabólica,
   - na forma $\Delta_x u - \Delta_y u + bu_t + \lambda u = 0$ se for parabólica,
   com $\lambda = \pm 1$ ou 0, $b = 1$ ou 0, e onde as variáveis foram denotadas $(x_1, ..., x_p, y_1, ...y_{n-p})$ $(0 \le p \le n)$ no primeiro caso e $(x_1, ..., x_p, y_1, ...y_q, z_1, ...z_r, t)$ $(p + q + r + 1 = n)$ no segundo.

7. Calcule a solução geral integrando depois de reduzir à forma canônica.
   a) $u_{xx} - 2\sin(x)u_{xy} - \cos(x)^2u_{yy} = \cos(x)u_y$ (sol $f(y + x - \cos(x)) + g(y - x - \cos(x))$).
   b) $y^2u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} = u_x$ (sugestão: quando puder escolher, ponha $w = x$);
   (sol $f(x + y^2/2) + yg(x + y^2/2)$).

8. Mostre que a equação $u_x^2u_{xx} + 2u_xu_yu_{xy} + u_y^2u_{yy} = 0$ é parabólica em correspondência de qualquer sua solução não constante.

9. a) Classifique quanto a ser hiperbólica, parabólica ou elíptica, as seguintes equações, em correspondência da solução dada.

$$e1) \quad u_{xx}u_x^2 - u_{yy}u^2 = u_y \quad [sol\ u(x, y) = x + 3]\,.$$

$$e2) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{xz} + u_x - 2u_y = u + e^y \quad [sol\ u(x, y, z) = xe^y]\,.$$

$$e3) \quad u_{xx}u_{yy} + \arctan(u_{yy}) = 0 \quad [sol\ u(x, y) = yf(x)]\,.$$

   b) Em quais casos o caráter da equação não depende da solução?

c) Para a primeira equação, calcule as curvas características correspondentes (se existirem). Elas mudariam em correspondência de outra solução?

c) Ainda para a primeira equação (em correspondência da solução dada), considere o problema de Cauchy na superfície $\{x = 0\}$: diga se faz sentido definir uma região de influência do segmento $\{x = 0,\ y \in [1, 2]\}$ e se fizer encontre ela (justifique!).

10. Aplique a transformada de Legendre à equação $u_x u_y = x$, calcule a solução geral do problema obtido e, voltando ao problema original, obtenha pelo menos uma solução não trivial.

11. Use separação de variáveis para achar uma solução da equação $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$. (sugestão: busque solução na forma $u(x, y) = X(x) + Y(y)$.)
(sol $(3/4)\sqrt[3]{3\lambda}(x\sqrt[3]{x} - y\sqrt[3]{y})$