9ª Lista de Exercícios de SMA5745 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Eq. e sistemas hiperbólicos.

1. Desacople a parte de primeira ordem dos sistemas a seguir, e resolva quando for possível.

   a) $u_t + w_x = u,\ w_t + u_x = w$

   b) $u_t + w_x = u,\ w_t + u_x = 0$

   c) Encontre explicitamente a solução do problema

   $u_t + w_x = 0,\ w_t + u_x = 0,\ u(x,0) = f(x),\ w(x,0) = g(x),$

   mostrando que a soma e a diferencia das incógnitas são constantes ao longo das características que lhe correspondem.

2. Resolva o sistema, passando a variáveis que o deixem desacoplado.

$$\begin{cases} u_t - 4u_x - 6w_x = 1 & u(x,0) = x^2 \\ w_t + 3u_x + 5w_x = -1 & w(x,0) = 0 \end{cases}$$

3. (Indique com p, q, r, s, t, as derivadas $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$, respectivamente).

   a) Considere a equação de primeira ordem $u_y = G(x, y, u, u_x)$. Escreva o sistema de 3 equações usado na demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevski e verifique que è sempre hiperbólico desde que $G_p \neq 0$.

   b) Considere a equação de segunda ordem $u_{yy} = G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy})$. Escreva o sistema de 6 equações usado na demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevski e verifique que è sempre hiperbólico desde que $G_s^2 + 4G_r > 0$. Mostre que se $F(\cdot) := u_{yy} - G(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy})$, isso corresponde à condição $F_s^2 - 4F_rF_t > 0$.

4. Calcule a solução do problema $u_{xy} = 0$, $u(x,x) = x^2|x|$, $u_x(x,x) = x|x|$: verifique que a solução é de classe $\mathcal{C}^2$ mas possui duas descontinuidades na derivada terceira que viajam ao longo das duas características que passam pela origem.

5. (quase feito na aula).

   Escreva o sistema de 3 equações associado ao problema $u_{yy} - u_{xx} = F(x,y)$, $u(x,0) = \phi$, $u_y(x,0) = \psi$.

   Verifique que é hiperbólico e desacople a parte que contém as derivadas.

   Calcule explicitamente a solução u(x,y) integrando as três equações de primeira ordem obtidas.

6. Mostre que a função

$$u(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq ay \\ (x - ay)^3 & se\ x > ay \end{cases}$$

   satisfaz em todo ponto a equação $u_{xx} - u_{yy} = 0$ se e só se $a = \pm 1$.

7. Diga qual das seguintes equações de ordem três gera um sistema hiperbólico:

   a) $u_{xxx} - u_{yyy} = 0$

   b) $u_{yyy} + u_{xxy} = 0$

   c) $u_{yyy} - u_{xxy} = 0$

   d) $u_{yyy} + 2u_{xyy} - u_{xxy} - 2u_{xxx} = 0$

8. Considere o problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x,0) = h(x) \qquad \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Escreva o sistema (junto com dado de Cauchy) de 3 equações usado na demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevski;

b) resolva o sistema (até onde der), passando a variáveis que o deixem desacoplado.

c) considere $h = 0$, mas ponha no sistema dados iniciais que não provenham da equação, para calcular explicitamente uma solução do sistema cuja primeira componente é nula para $y = 0$ mas não satisfaz a equação.

9. a) Considere a equação $u_{xx} + y^2 u_{xy} - (1 + y^2) u_{yy} = f(x, y)$ com dados $u(0, y) = g(y)$ e $u_x(0, y) = h(y)$: verifique que o problema não é característico e esboce o domínio de dependência de um ponto (x, y) no plano e a região de influencia do segmento $(0, 0) - (0, 2)$.

   b) Repita no caso dos dados serem $u(x, 0) = g(x)$ e $u_y(x, 0) = h(x)$ e o segmento $(0, 0) - (2, 0)$.