Lista de Fórmulas de EDP

1 Notação

1. Denotaremos por ω_n a área de superfície de $\partial B_1(0)$ e por α_n o volume da bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, onde $\omega_n = n\alpha_n$.
2. $\displaystyle ⨍_{B_r(x)} f(y)\,dy = \frac{1}{\alpha_n r^n}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy$
3. $\displaystyle ⨍_{\partial B_r(x)} f(y)\,dS(y) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)} f(y)\,dS(y)$

2 Equação da Onda

2.1 Equação da Onda Homogênea

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 \\ u(x,0) &= \phi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

1. Fórmula de D'Alambert
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\phi(x+t) + \phi(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi)d\xi\right) \tag{1}$$

2. Fórmula de Poisson*(n=2)*
$$u(x,t) = \frac{t}{2} ⨍_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + t\psi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\,dV_y \tag{2}$$

3. Fórmula de Kirchhiff*(n=3)*
$$u(x,t) = ⨍_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + t\psi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x)]\,dS_y \tag{3}$$

4. Fórmula de solução radial simétrica (dim 3 - ϕ e ψ pares)
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{t}{\rho}\right)\phi(\rho+t) + \left(1-\frac{t}{\rho}\right)\phi(\rho-t) + \frac{1}{\rho}\int_{\rho-t}^{\rho+t}\xi\psi(\xi)d\xi\right] \tag{4}$$

5. Fórmula geral para ordem n ímpar
$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B_t(x)}\phi\,dS\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}⨍_{\partial B_t(x)}\psi\,dS\right)\right] \tag{5}$$

onde $\gamma_n = 1.3.5\ldots(n-2)$

6. Fórmula geral para ordem n par

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy\right) + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2-|y-x|^2}}\,dy\right)\right] \quad (6)$$

onde $\gamma_n = 2.4\ldots(n-2).n$

2.2 Equação da Onda Não-Homogênea

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = f, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) & = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ u_t(x,0) & = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

1. O princípio de Duhamel diz que este problema tem como solução

$$u(x,t) := \int_0^t u(x,t:s)ds \quad (7)$$

onde $u(x,t;s)$ é solução de

$$\begin{cases} u_{tt}(\,\cdot\,;s) - \Delta u(\,\cdot\,;s) & = 0, & \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\,\cdot\,;s) & = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \\ u_t(\,\cdot\,;s) & = f(\,\cdot\,;s), & \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

2. No caso $n=1$ temos

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-s}^{x+s} f(y,t-s)dyds. \quad (8)$$

3 Laplaciano

1. Identidades de Green (Ω regular e $u,v \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$)

$$\int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u = \int_\Omega (v\Delta u + \nabla v\,\nabla u) \qquad e \qquad \int_{\partial\Omega}(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v) = \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)$$

2. Solução fundamental de $-\Delta$

$$\psi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\ln|x| & \text{if} \quad n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{if} \quad n\geq 3 \end{cases}.$$

3. Solução do Laplaciano no Semi Espaço.

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial \mathbb{R}^n_+} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y) \tag{9}$$

para $x \in \mathbb{R}^n_+$ e $y \in \partial \mathbb{R}^n$.

4. Solução do Laplaciano na $B_r(0)$.

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{\omega_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{g(y)}{|x-y|^n} dS(y),$$

para $x \in B_r^0(0)$ e $y \in \partial B_r(0)$.

4 Equação do Calor

$$\begin{cases} u_t - \Delta u & = 0 \\ u(x,0) & = g, \qquad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \end{cases}$$

1. Solução fundamental

$$\psi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{if } x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0; \\ 0 & \text{if } x \in \mathbb{R}^n,\ t \leq 0. \end{cases}$$