

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Equações Diferenciais Parciais

Eugenio Tommaso Massa

31 de Julho de 2014



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Equações diferenciais parciais em geral</b>	<b>7</b>
1.1	Introdução . . . . .	7
1.1.1	Notação de multi-índices . . . . .	7
1.1.2	Definição de EDP, solução, tipo de não linearidade . . . . .	8
1.1.3	Tipos de problemas . . . . .	9
1.2	Problema de Cauchy . . . . .	11
1.2.1	Mudança de variável . . . . .	11
1.3	Condição de não-caracteristicidade . . . . .	15
1.3.1	Não-caracteristicidade no caso linear e semilinear . . . . .	15
1.3.2	Não-caracteristicidade para problemas não-lineares . . . . .	17
1.4	O Teorema de Cauchy-Kowalevski . . . . .	20
1.4.1	Transformação de um problema escalar num sistema . . . . .	20
1.4.2	Outras formas para o sistema equivalente . . . . .	24
1.4.3	O Teorema de Cauchy-Kowalevski . . . . .	24
1.5	O teorema de Holmgren . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Equações de Primeira Ordem</b>	<b>33</b>
2.1	O método das características . . . . .	33
2.1.1	O caso linear e semilinear . . . . .	33
2.1.2	O caso quasilinear . . . . .	36
2.1.3	O teorema de existência e unicidade . . . . .	38
2.1.4	O caso geral (totalmente não linear) . . . . .	41
2.1.5	Comentários sobre o método das características . . . . .	46
2.2	O exemplo de Lewy . . . . .	47
<b>3</b>	<b>Transporte e conservação</b>	<b>49</b>
3.1	Equações de transporte . . . . .	49
3.2	Equações de conservação . . . . .	51
3.2.1	Soluções integrais . . . . .	52
3.2.2	Problema de Riemann e soluções com choque . . . . .	53
3.2.3	Problemas de conservação em dimensão maior . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Classificação de Equações (de Segunda Ordem)</b>	<b>57</b>
4.1	Equações lineares de segunda ordem em duas variáveis . . . . .	57
4.1.1	O caso hiperbólico $\Delta > 0$ . . . . .	59

4.1.2	O caso parabólico $\Delta = 0$ . . . . .	61
4.1.3	O caso elíptico $\Delta < 0$ . . . . .	61
4.1.4	Alguns exemplos . . . . .	62
4.2	Equações lineares de segunda ordem em $n$ variáveis . . . . .	65
4.2.1	O caso a coeficientes constantes . . . . .	68
4.3	Classificação para equações não lineares . . . . .	70
4.4	Transformada de Legendre . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Técnicas para equações hiperbólicas</b>	<b>75</b>
5.1	Sistemas hiperbólicos em duas variáveis . . . . .	75
5.2	Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos. . . . .	79
5.3	Estudo de equações hiperbólicas em forma canônica. . . . .	81
<b>6</b>	<b>Equação da onda</b>	<b>85</b>
6.1	Introdução . . . . .	85
6.2	Condição de não-caracteristicidade e boa posição . . . . .	86
6.3	Unicidade . . . . .	88
6.4	A equação da onda em uma dimensão . . . . .	90
6.4.1	Soluções generalizadas e domínios limitados . . . . .	92
6.5	Complementos via exercícios . . . . .	93
6.6	A equação da onda em dimensão ímpar maior que um . . . . .	94
6.6.1	Alguns lemas e definições . . . . .	94
6.6.2	Cálculo da solução . . . . .	97
6.6.3	Solução no caso radial em dimensão ímpar . . . . .	100
6.7	A equação da onda em dimensão par . . . . .	101
6.8	A solução da equação não homogênea . . . . .	103
6.9	Comentários . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Equações com o operador Laplaciano</b>	<b>109</b>
7.1	Tipos de problemas . . . . .	110
7.2	Identidade de Lagrange Green e consequências . . . . .	112
7.3	Propriedade do valor médio para funções harmônicas . . . . .	113
7.4	Princípio de máximo . . . . .	116
7.5	Soluções fundamentais . . . . .	118
7.5.1	Função de Green . . . . .	122
7.6	Solução do problema de Dirichlet . . . . .	125
7.6.1	Solução do problema de Dirichlet num semiespaço . . . . .	125
7.6.2	Solução do problema de Dirichlet numa bola . . . . .	128
7.6.3	Método de Perron . . . . .	130
7.6.4	Resultados de regularidade . . . . .	131
<b>8</b>	<b>Equação do calor</b>	<b>133</b>
8.1	Solução fundamental . . . . .	134
8.2	Problema de valores iniciais . . . . .	137
8.2.1	O problema homogêneo . . . . .	137
8.2.2	O problema com fonte . . . . .	138

8.3	Problema misto e princípios do Máximo . . . . .	140
8.3.1	Princípio de Máximo para o problema em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	142
8.4	Alguns resultados via energia . . . . .	144
8.5	Problemas mistos via separação de variáveis . . . . .	145
<b>Bibliografia</b>		<b>147</b>

Estas notas foram escritas para ajudar no curso do ICMC, SMA5745 - Equações Diferenciais Parciais.

Escrevi em 2010, depois de ministrar o curso pela primeira vez, em 2009, e completei durante o segundo semestre, quando ministrei de novo o curso.

As notas cobrem quase inteiramente a ementa do curso, mesmo que nem sempre entrem em todos os detalhes.

No final de cada capítulo são citadas as principais referências usadas em cada assunto. Note-se porém que muitas vezes a notação foi trocada com respeito às referências para obter uma melhor clareza (na minha opinião) e para ter uniformidade de notação ao longo das notas.

Agradeço se me enviarem comentários ou correções, no endereço [eugenio@icmc.usp.br](mailto:eugenio@icmc.usp.br)



# Capítulo 1

## Equações diferenciais parciais em geral

### 1.1 Introdução

#### 1.1.1 Notação de multi-índices

Para tornar mais fácil trabalhar com muitas derivadas parciais, adotaremos a notação de multi-índices, que introduzimos nesta seção.

Um **multi-índice** será um elemento do *conjunto de multi-índices*:

$$MI_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \alpha_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Usaremos a notação  $e_i$  para denotar o multi-índice  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  com 1 na  $i$ -ésima posição.

Definimos:

- *Módulo* do multi-índice  $\alpha \in MI_n$  :  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .
- *Fatorial* do multi-índice  $\alpha \in MI_n$  :  $\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i!$ .
- *Potência* de um vetor elevado a um multi-índice:  
dados  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\alpha \in MI_n$ ,  $x^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ .
- *Operador de derivação* com multi-índice: dada  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (suficientemente regular para não importar a ordem de derivação):  $\partial^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$ , onde  $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Para  $k \in \mathbb{N}$ , definimos

- $A_n(k) = \{\alpha \in MI_n; |\alpha| \leq k\}$ ;
- $N_n(k) \in \mathbb{N}$  a cardinalidade de  $A_n(k)$ ;
- dados  $A \subseteq A_n(k)$  e a família indexada de objetos  $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ , denotaremos por  $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$  um vetor de  $\text{card}(A)$  entradas contendo os elementos do conjunto numa ordem convencional.

**Observação 1.1.** Para simplificar a notação, omitiremos o índice  $n$  e assumiremos os multi-índices em  $MI_n$  sempre que  $n$  for fixado, assim escreveremos apenas  $|\alpha| \leq k$  em vez que  $\alpha \in A_n(k)$ .

Também usaremos a notação  $u_x, u_{xy}, u_{x_i x_j}, \dots$  para as derivadas parciais de  $u$  com respeito às variáveis indicadas,  $\nabla u$  para o vetor gradiente e  $\partial_{x_i}$  ou  $\partial_i$  para os operadores de derivação.  $\triangleleft$

A seguir lembramos algumas fórmulas em notação de multi-índice, que serão usadas no texto (verifique-as!).

**Polinômio de Leibnitz:**

$$\text{para } x \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}, \quad \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in MI_n \\ |\alpha|=k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha. \quad (1.1)$$

**Série de Taylor** de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  em vizinhança de  $x_0$ :

$$S_{x_0}(x) = \sum_{\alpha \in MI_n} \frac{\partial^\alpha f(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha.$$

### 1.1.2 Definição de equação diferencial parcial e de solução, tipo de não linearidade

**Definição 1.2.** Dado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aberto, uma equação diferencial parcial de ordem  $k$  é uma equação da forma

$$F(x, (\partial^\alpha u)_{\alpha \in A_n(k)}) = 0, \quad (1.2)$$

onde  $F : D_F \rightarrow \mathbb{R}$  sendo  $D_F$  um aberto em  $\Omega \times \mathbb{R}^{N_n(k)}$ .

**Definição 1.3.** Uma função  $u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  (sendo  $\Omega' \subseteq \Omega$ ) é uma solução clássica de (1.2), quando

- as  $\partial^\alpha u$  existem para todo  $\alpha \in A_n(k)$ ; (às vezes pediremos também  $u \in C^k(\Omega')$ ),
- a equação (1.2) está bem definida e satisfeita em  $\Omega'$ , isto é,

$$F(x, (\partial^\alpha u(x))_{\alpha \in A_n(k)}) = 0, \quad \text{para todo } x \in \Omega'.$$

Além da ordem, uma classificação importante para distinguir as propriedades das equações é a baseada no **tipo de não linearidade**: a equação (1.2) é dita:

- **linear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u = f(x),$$

onde  $a_\alpha$  e  $f$  podem depender de  $x \in \Omega$  apenas;

- **linear a coeficientes constantes**, se é linear e os  $a_\alpha$  não dependem de  $x$ ;



- **semilinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u + G(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) = 0 :$$

isto é, é linear pelo menos nos termos de grau máximo;

- **quasilinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) \partial^\alpha u + H(x, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}) = 0 :$$

isto é, os coeficientes  $a_\alpha$  com  $|\alpha| = k$  dependem de  $x \in \Omega$  e de  $(\partial^\beta u)_{|\beta|<k}$ , mas não de  $(\partial^\beta u)_{|\beta|=k}$ ;

- **totalmente não-linear**, quando nenhum dos casos anteriores ocorre.

*Exemplo 1.4.* Os exemplos a seguir mostram equações dos vários tipos, incluindo algumas das equações mais importantes que estudaremos.

- 1)  $\sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_i u = 0$ : linear de primeira ordem.
- 2)  $\Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_i^2 u = 0$  (**equação de Laplace**),  $\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u = 0$  (**equação da onda**),  $\partial_t u - k \Delta_x u = 0$  (**equação do calor**): lineares a coeficientes constantes de segunda ordem.
- 3)  $\sum_{i=1}^n x_i \partial_i \partial_{(n+1-i)} u = \sum_{i=1}^n (\partial_i u)^2$ : semilinear de segunda ordem.
- 4)  $u_y^2 u_{xx} = x + u^2 + \sqrt{u_y}$ : quasilinear de segunda ordem.
- 5)  $u_{yy}(u_x + u_{yy}) = u$ : totalmente não-linear de segunda ordem.
- 6)  $u_t + a(x) \cdot \nabla_x u = f(x)$ : equação de **transporte linear** com fonte: primeira ordem linear.
- 7)  $u_t + a(x, u) \cdot \nabla_x u = 0$ : equação de **transporte quasilinear**: primeira ordem quasilinear.
- 8)  $|\nabla u| = 1$ : equação da **ótica geométrica**: primeira ordem totalmente não linear. ★

### 1.1.3 Tipos de problemas

Em geral não consideraremos apenas o problema de encontrar soluções da equação, mas o de encontrar as soluções que satisfaçam também um oportuno conjunto de condições adicionais (exatamente como é feito com as EDOs, quando procuramos a solução de um certo problema de Cauchy).

Estaremos interessados em estudar o tipo de condições necessárias para obtermos existência, unicidade e dependência contínua dos dados (definição de *problema bem posto segundo Hadamard*). Também, quando possível, procuraremos estudar as propriedades qualitativas das soluções (já que em geral não será possível calculá-las explicitamente).

Veremos que de alguma maneira (mas com certos cuidados e nem para todo tipo de EDP) as soluções de uma equação diferencial parcial de ordem  $k$  em  $\mathbb{R}^n$  dependem de  $k$  funções arbitrárias em  $n - 1$  variáveis (no caso de EDOs isso significa  $k$  constantes arbitrárias).

*Exemplo 1.5.*

1)  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  em  $\mathbb{R}^2$

A solução geral é  $u(x, y) = f(y)$ . Note que se  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , então  $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , mas a equação faz sentido e está satisfeita mesmo se  $f$  for menos regular.

Consideremos as seguintes condições:

- $u(0, y) = \varphi(y)$ .  
a solução (única) é  $u(x, y) = \varphi(y)$ .  
Observe que ao longo do eixo  $y$  (onde é posta a condição)  $u$  e  $u_y = \varphi'(y)$  podem ser determinados pela condição e  $u_x$  pela equação.
- $u(x, 0) = \psi(x)$ .  
a condição  $u(x, 0) = \psi(x)$  é compatível com a equação apenas se  $\psi(x) = c$  constante. Neste caso  $u(x, y) = f(y)$  desde que  $f(0) = c$ . Portanto, pode ter nenhuma ou infinitas soluções, ou seja, o problema é mal posto.  
Note que ao longo do eixo  $x$  (onde é posta a condição)  $u = \psi$  e  $u_x = \psi'$  são sobredeterminados, enquanto  $u_y$  é indeterminado.

2)  $\partial_{xy}^2 u = 0$ , com  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .

A solução geral é  $u(x, y) = f(x) + g(y)$ , de fato

$$u_x(x, y) = C(x) + \int_{y_0}^y u_{xy}(x, t) dt = C(x)$$

$$u(x, y) = D(y) + \int_{x_0}^x u_x(t, y) dt = D(y) + \int_{x_0}^x C(t) dt.$$

Consideremos as seguintes condições iniciais:

- $u(0, y) = \varphi(y)$  e  $u_x(0, y) = \psi(y)$ .  
Como  $u_{xy} = 0$ , então a solução só existe se  $\psi(y) = c$  constante. Se for assim, o problema tem infinitas soluções da forma  $u(x, y) = \varphi(y) + f(x)$ , onde  $f'(0) = c$  e  $f(0) = 0$ .  
Observe que  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_{xy}$  e  $u_{yy}$  podem ser determinados sobre o eixo  $y$  pelas condições, mas  $u_{xx}$  é indeterminado e  $u_{xy}$  é imposto também pela equação;
- neste exemplo não adianta trocar  $x$  e  $y$ : o caso  $u(x, 0) = \varphi(x)$  e  $u_y(x, 0) = \psi(x)$  é análogo ao anterior;
- $u(x, x) = \varphi(x)$  e  $u_x(x, x) = \psi(x)$ .  
Como a solução geral é  $u(x, y) = f(x) + g(y)$ , então  $u(x, x) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$  e  $u_x(x, x) = f'(x) = \psi(x)$ . Assim,  $f(x) = C + \Psi(x)$  (onde  $\Psi(x) = \int_0^x \psi(t) dt$ ) e  $g(x) = \varphi(x) - (C + \Psi(x))$ , ou seja,  $u(x, y) = \Psi(x) - \Psi(y) + \varphi(y)$ : existe uma única solução.  
Note que neste exemplo, sobre a reta  $(x, x)$ , podemos calcular as quantidades  $u$ ,  $u_x$  e  $u_y$ , e duas relações entre  $u_{xx}$ ,  $u_{xy}$  e  $u_{yy}$  pelas condições, assim a equação fecha o problema e permite determinar as seis quantidades.

★

*Exercício 1.6.*

Seja  $f_n(x) = e^{-\sqrt{n}} \sin(nx)$ . Use separação de variáveis para resolver os seguintes problemas (de Cauchy) para o Laplaciano, a Equação da Onda e a Equação do Calor:

$$(L) \begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (O) \begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observe que quando  $n \rightarrow \infty$ , o dado e todas suas derivadas tendem uniformemente a zero. No caso (O), a solução também tende uniformemente a zero com todas suas derivadas. No caso (C), o mesmo acontece se consideramos  $y > 0$ , enquanto a solução explode para  $y < 0$ . No caso (L), a solução explode sempre.

Esta observação mostra que o problema apresentado não é bem posto para o Laplaciano nem para o calor com  $y < 0$ , enquanto poderia ser bem posto para a onda e para o calor com  $y > 0$ . ★

## 1.2 Problema de Cauchy

**Definição 1.7.** Dadas a equação (1.2), uma hipersuperfície  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  de codimensão 1 e  $k$  funções  $\phi_0, \phi_\alpha, \dots, \phi_{k-1} : S \rightarrow \mathbb{R}$ , chamamos **problema de Cauchy para a equação (1.2)** o problema de encontrar uma solução de (1.2) definida numa vizinhança  $V_S$  de  $S$  e que satisfaça

$$\partial_\nu^i u = \phi_i, \quad \forall i = 0, 1, \dots, k-1, \quad \text{em } S$$

onde  $\nu$  é o vetor normal a  $S$ .

Chamaremos de **dados de Cauchy** as funções  $\phi_i$  e de **superfície dos dados** a superfície  $S$ .

O exemplo 1.5 visto anteriormente mostra que nem sempre temos existência e unicidade para este problema.

### 1.2.1 Mudança de variável

Dado o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{F}(\tilde{x}, (\partial^\alpha \tilde{u})_{|\alpha| \leq k}) = 0 \\ \partial_\nu^i \tilde{u} = \tilde{\varphi}_i \end{cases} \quad \text{em } \tilde{S} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \quad (1.3)$$

para simplificar a geometria podemos, pelo menos localmente, usar uma mudança de variáveis que leve  $\tilde{S}$  no plano  $\{x_n = 0\}$ , de maneira que (1.3) se torne

$$\begin{cases} F(\hat{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \\ \partial_{x_n}^i u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{cases} \quad \text{em } S \quad (i = 0, 1, \dots, k-1), \quad (1.4)$$

onde agora  $S := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n : \hat{x}_n = 0\}$ .

Observe-se que se  $\tilde{S}$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  então a mudança de variáveis pode ser escolhida de classe  $\mathcal{C}^k$  e a regularidade das soluções é preservada: para termos soluções em  $\mathcal{C}^k$  pediremos então  $\tilde{S}$  de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\tilde{\varphi}_j \in \mathcal{C}^{k-j}$  para (1.3) e simplesmente  $\varphi_j \in \mathcal{C}^{k-j}$  para (1.4). Veremos na seção 1.4.1 que em alguns casos precisaremos de um pouco mais de regularidade ainda.

Como em (1.4) a última variável joga um papel diferente, usaremos a nova notação  $\hat{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t) = (x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ , e quando precisar escreveremos  $\alpha \in MI_n$  na forma  $(\beta, j)$  com  $\beta \in MI_{n-1}$  e  $j \in \mathbb{Z}$ : o problema (1.4) escreve-se então

$$\begin{cases} F(x, t, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0 \\ \partial_t^j u(x, 0) = \varphi_j(x) \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (i = 0, 1, \dots, k-1). \quad (1.5)$$

Note-se que se  $|\alpha| \leq k$  e  $\alpha \neq (0, 0, \dots, 0, k)$ , então podemos calcular  $\partial^\alpha(u)(x, 0)$  em  $S$ , apenas dos dados de Cauchy, de fato,  $\partial^{(\beta, j)}(u)(x, 0) = \partial^\beta \varphi_j(x)$ . Apenas  $\partial^{(0, k)}(u)(x, 0)$ , entre as derivadas de ordem até  $k$ , não pode ser calculada dos dados de Cauchy. Como vimos no exemplo 1.5, uma condição natural para que possamos esperar de resolver (1.5) é que  $\partial^{(0, k)}(u)(x, 0) = \partial_t^k u$  possa ser calculada em vizinhança de  $S$  usando a equação, isto é, que a equação  $F(x, t, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) = 0$  possa ser resolvida com respeito a  $\partial_t^k u$  (pelo menos localmente).

No caso do problema na forma mais geral (1.3), a condição acima corresponde a poder calcular, usando a equação, a derivada  $k$ -ésima na direção  $\nu$  normal a  $\tilde{S}$ , ao longo de  $\tilde{S}$ .

Para entender como deve ser posta esta condição precisamos estudar como muda um operador diferencial com respeito a uma mudança de variáveis.

### Transformação do operador

Vejamos primeiro como mudam os operadores de derivação no caso mais simples de uma *mudança de variáveis linear*: seja

$$G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : x \mapsto y = Jx \quad (1.6)$$

linear e tal que  $\det J \neq 0$ : dessa maneira  $J$  é também o Jacobiano da transformação:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix};$$

indicaremos os operadores de derivação com respeito aos dois vetores de variáveis por

$$\partial_x = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \partial_y = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} \\ \vdots \\ \partial_{y_n} \end{bmatrix}.$$

Observe que dada uma função  $u(x)$  e definindo  $v(y) := u(G^{-1}(y))$ , pela regra da cadeia em notação matricial, temos

$$J_v(y) = J_u(G^{-1}(y)) J_{G^{-1}}(y) = J_u(x) J_G^{-1}(G^{-1}y) = J_u(x) J^{-1},$$

como  $J_v(y)$  e  $J_u(x)$  são respectivamente  $\nabla_y v(y) = \partial_y^t v(y)$  e  $\nabla_x u(x) = \partial_x^t u(x)$  obtemos

$$\partial_y = (J^t)^{-1} \partial_x, \quad \text{e} \quad \partial_x = J^t \partial_y.$$

Observe que podemos obter o mesmo resultado pela fórmula escrita por componentes

$$\partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^n J_{i,j} \partial_{y_i}.$$

Assim, um operador linear a coeficientes constantes  $L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial_x^\alpha$  nas novas variáveis é escrito como

$$\tilde{L} = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha \partial_y^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha [J^t \partial_y]^\alpha; \tag{1.7}$$

observemos que os novos coeficientes  $b_\alpha$  dependem dos  $\{a_{\hat{\alpha}}\}_{|\hat{\alpha}|=|\alpha|}$  e de  $J$ , que são constantes.

*Exemplo 1.8.* Seja  $G(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 3x_2)$ , logo  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

Vamos calcular  $\partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 = \partial_x^{(1,2)} = (J^t \partial_y)^{(1,2)}$ .

Como  $\partial_x = J^t \partial_y$ , então

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} + 2\partial_{y_2} \\ \partial_{y_1} + 3\partial_{y_2} \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\partial_{x_1} \partial_{x_2}^2 = (\partial_{y_1} + 2\partial_{y_2})(\partial_{y_1} + 3\partial_{y_2})(\partial_{y_1} + 3\partial_{y_2}) = \partial_{y_1}^3 + 8\partial_{y_1}^2 \partial_{y_2} + 21\partial_{y_1} \partial_{y_2}^2 + 18\partial_{y_2}^3$ . ★

Consideremos agora o caso de um operador linear qualquer:  $L_x = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$  e de uma mudança de coordenadas mais geral

$$G : \Omega \rightarrow \Omega' : x \mapsto y = G(x), \tag{1.8}$$

onde  $G \in C^k(\Omega)$ , é bijetora e  $\det J_G \neq 0$  em  $\Omega$ .

Pelo mesmo raciocínio do caso anterior  $L_x$  se transformará no operador

$$\tilde{L}_y = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha(y) \partial_y^\alpha = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(G^{-1}(y)) [J_G^t(G^{-1}(y)) \partial_y]^\alpha. \tag{1.9}$$

Observe-se porém que os coeficientes  $b_\alpha(y)$  não dependem apenas dos valores de  $\{a_{\hat{\alpha}}\}_{|\hat{\alpha}|=|\alpha|}$  e de  $J_G$  calculados no ponto  $G^{-1}(y)$ , pois explicitando  $[J_G^t(G^{-1}(y)) \partial_y]^\alpha$  pela regra do produto, aparecerão também termos envolvendo as derivadas de  $J_G$  e operadores de derivação de ordem menor que  $|\alpha|$ , isto é, agora os  $b_\alpha(y)$  dependem de todos os  $\{a_{\hat{\alpha}}\}_{|\hat{\alpha}| \geq |\alpha|}$  e até das derivadas de  $J_G$ . Isso implica que os coeficientes da equação mudam de maneira bem mais complexa com respeito ao caso anterior (1.6).

Os únicos termos que ainda mudam de maneira simples são os de ordem máximo  $k$ , pois eles correspondem apenas aos que provêm de  $[J_G^t(G^{-1}(y)) \partial_y]^\alpha$  com  $|\alpha| = k$  quando nenhuma

derivada é aplicada a  $J_G$ : concluímos que os termos de grau máximo de  $\tilde{L}$  no ponto  $y$  são exatamente

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(G^{-1}(y)) [J^t \partial_y]^\alpha, \quad (1.10)$$

onde  $J^t$  é a matriz (fixada)  $J_G^t(G^{-1}(y))$ .

*Exemplo 1.9.* Seja  $G(x_1, x_2) = x_1 + x_2, 2x_1 + x_2^2/2$ , logo  $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & x_2 \end{bmatrix}$ .

Vamos calcular  $\partial_{x_2}^2 = \partial_x^{(0,2)} = (J^t \partial_y)^{(0,2)}$ .

Temos

$$\begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{y_1} + 2\partial_{y_2} \\ \partial_{y_1} + x_2 \partial_{y_2} \end{bmatrix}.$$

Logo,  $\partial_{x_2}^2 = (\partial_{y_1} + x_2 \partial_{y_2})(\partial_{y_1} + x_2 \partial_{y_2}) = \partial_{y_1}^2 + 2x_2 \partial_{y_1} \partial_{y_2} + x_2^2 \partial_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + x_2 \frac{\partial x_2}{\partial y_2}\right) \partial_{y_2}$ .

Observe-se que os primeiros termos são todos de ordem de derivação 2 e são exatamente os mesmos que teríamos se no lugar do coeficiente  $x_2$  tivesse um coeficiente constante, mas aparece mais um termo com ordem de derivação um que depende das derivadas de  $x_2$ . ★

*Exemplo 1.10.* Seja  $G : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (z, w) = (x^2 + y, y)$ . Assim  $J_G(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Vamos calcular  $(\partial_z, \partial_w)^\alpha$  para todo  $\alpha$  de módulo menor ou igual a 2.

Como  $\partial_{(x,y)} = J^t \partial_{(z,w)}$ , então

$$\begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \partial_z \\ \partial_z + \partial_w \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\partial_x^2 = (2x \partial_z)(2x \partial_z) = 4x^2 \partial_z^2 + 4x x_z \partial_z,$$

$$\partial_y^2 = (\partial_z + \partial_w)^2 = \partial_z^2 + \partial_w^2 + 2\partial_z \partial_w,$$

$$\partial_x \partial_y = (2x \partial_z)(\partial_z + \partial_w) = 2x(\partial_z^2 + \partial_z \partial_w).$$

Observe que trocando a ordem obtemos

$$\partial_y \partial_x = (\partial_z + \partial_w)(2x \partial_z) = 2x(\partial_z^2 + \partial_z \partial_w) + 2(x_z + x_w) \partial_z, \text{ o que é o mesmo pois}$$

$$\begin{bmatrix} x_z & x_w \\ y_z & y_w \end{bmatrix} = J_G(x, y)^{-1} = \frac{1}{2x} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}$$

então  $(x_z + x_w) = 0$ .

Para finalizar, escrevemos tudo nas novas variáveis: como  $x = \sqrt{z-w}$  e  $x_z = (2\sqrt{z-w})^{-1}$  temos

$$\partial_x = 2\sqrt{z-w} \partial_z, \quad \partial_y = \partial_z + \partial_w,$$

$$\partial_x^2 = 4(z-w) \partial_z^2 + 2\partial_z, \quad \partial_y^2 = \partial_z^2 + \partial_w^2 + 2\partial_z \partial_w, \quad \partial_x \partial_y = 2\sqrt{z-w}(\partial_z^2 + \partial_z \partial_w).$$

Por exemplo, se  $(x, y) = (1, 1)$  temos  $z = 2, w = 1$  e

$$\partial_x = 2\partial_z, \quad \partial_y = \partial_z + \partial_w,$$

$$\partial_x^2 = 4\partial_z^2 + 2\partial_z, \quad \partial_y^2 = \partial_z^2 + \partial_w^2 + 2\partial_z \partial_w, \quad \partial_x \partial_y = 2(\partial_z^2 + \partial_z \partial_w).$$

Se repetirmos as contas com a transformação linear  $G^*(x, y) = (2x + y, y)$ , cujo Jacobiano coincide com o de  $G$  no ponto  $(1, 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial_x &= 2\partial_z, & \partial_y &= \partial_z + \partial_w, \\ \partial_x^2 &= 4\partial_z^2, & \partial_y^2 &= \partial_z^2 + \partial_w^2 + 2\partial_z\partial_w, & \partial_x\partial_y &= 2(\partial_z^2 + \partial_z\partial_w). \end{aligned}$$

Podemos então observar que todos os termos de grau máximo nas 5 expressões coincidem, mas no caso não-linear aparece um termo a mais (na  $\partial_x^2$ ) de ordem menor e que não depende apenas de  $J_G(1, 1)$ , mas de sua derivada. ★

### Transformação da normal à superfície

Agora precisamos ver como transforma a direção normal a uma superfície com respeito à mudança de variável.

Para uma hipersuperfície  $S$  dada parametricamente na forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = g(s)\}, \quad g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.11}$$

com  $g$  de classe pelo menos  $\mathcal{C}^1$ , os vetores tangentes a  $S$  num ponto  $x_0 = g(s_0)$  são as colunas  $\frac{\partial g}{\partial s_i}(s_0)$  do Jacobiano de  $g$ . Assim, se a normal  $\nu(x_0)$  é vetor coluna, deve satisfazer  $\nu(x_0)^t \frac{\partial g}{\partial s_i}(s_0) = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ , logo  $\nu$  é determinado por

$$\nu(x_0)^t J_g(s_0) = 0.$$

A superfície  $S$  nas novas variáveis é escrita como  $y = \tilde{g}(s) := G(g(s))$  e a normal  $\tilde{\nu}(y_0)$  em  $y_0 = G(x_0)$  satisfaz  $\tilde{\nu}^t(y_0) J_{\tilde{g}}(s_0) = 0$ , isto é  $\tilde{\nu}^t(y_0) J_G(x_0) J_g(s_0) = [J_G(x_0)^t \tilde{\nu}(y_0)]^t J_g(s_0) = 0$ : isto significa que

$$\nu(x_0) = J_G(x_0)^t \tilde{\nu}(y_0). \tag{1.12}$$

No caso da superfície ser dada implicitamente por  $\Phi(x) = 0$ , então a normal num ponto  $x_0$  seria  $\nu(x_0) = \nabla\Phi(x_0)^t$ ; a superfície nas novas variáveis será dada por  $\Phi(G^{-1}y) = 0$  então a normal será  $\tilde{\nu}(y_0) = [\nabla\Phi(G^{-1}y_0) J_G^{-1}(G^{-1}y_0)]^t$ : de novo obtemos (1.12).

## 1.3 Condição de não-caracteristicidade

Voltemos agora ao problema de entender quando a equação no problema (1.3) pode ser resolvida com respeito à derivada  $\partial_\nu^k u$ ; diremos que o problema é **não-característico** num ponto  $x_0 \in \tilde{S}$  quando isso pode ser feito, e **característico** quando não é possível. Procuraremos então uma **condição de não-caracteristicidade**.

### 1.3.1 Não-caracteristicidade no caso linear e semilinear

No caso linear consideramos as seguintes definições:

**Definição 1.11.** *Seja*

$$L_x u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) \partial^\alpha u \tag{1.13}$$

um operador linear e  $S$  uma hipersuperfície de vetor normal  $\nu$ : definimos

- **polinômio característico** de  $L$  em  $x$ :  $\chi_{L,x}(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)\xi^\alpha$  ( $\xi \in \mathbb{R}^n$ );
- **vetor característico** de  $L$  em  $x$ :  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $\chi_{L,x}(\xi) = 0$ ;
- **variedade característica** de  $L$  em  $x$ :  $\text{char}_x(L) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \chi_{L,x}(\xi) = 0\}$ ;
- dizemos que o operador  $L$  é **elíptico** em  $x$  se  $\text{char}_x(L) = \emptyset$ .

Seja  $e_j$  o  $j$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ . Então vale que  $e_j \in \text{char}_x(L) \Leftrightarrow \chi_{L,x}(e_j) = 0 \Leftrightarrow \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x)(e_j)^\alpha = a_{ke_j}(x) = 0$  ( $a_{ke_j}(x)$  é o coeficiente de  $\partial_{x_j}^k$  em (1.13)). Isso nos diz que o operador  $L$  na direção  $e_j$  não é realmente de ordem  $k$  e sim de ordem menor do que  $k$ , ou seja, a equação  $Lu = f(x)$  não pode ser resolvida com respeito a  $\partial_{x_j}^k u$  (isto é, não podemos obter  $\partial_{x_j}^k u$  em função de  $x$  e de  $(\partial_{x_j}^\alpha u)_{|\alpha| \leq k, \alpha \neq ke_j}$ ).

Como vimos, operador e vetor normal à superfície mudam pela mesma lei com respeito a uma mudança de variável  $G$  como em (1.8), em particular, usando a mesma notação da seção anterior,

$$\chi_{\tilde{L},y_0}(\rho) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x_0)[J_G^t(x_0)\rho]^\alpha = \chi_{L,x_0}(J_G^t(x_0)\rho) \quad \text{e} \quad \nu(x_0) = J_G^t(x_0)\tilde{\nu}(y_0);$$

deduzimos que  $\chi_{\tilde{L},y_0}(\tilde{\nu}(y_0)) = \chi_{L,x_0}(\nu(x_0))$ : o valor do polinômio característico aplicado à normal independe das variáveis usadas. Assim,  $\nu \in \text{char}_x(L)$  significará que o operador  $L$  na direção  $\nu$  não é realmente de ordem  $k$  e sim de ordem menor do que  $k$ , e em particular se aplicarmos uma mudança de variável para transformar a superfície  $S$  no plano  $\{x_n = 0\}$  como quando passamos do problema (1.3) ao (1.4), a equação resultante não poderá ser resolvida com respeito a  $\partial_{x_n}^k u$ . Chegamos então à condição que precisamos:

**Definição 1.12 (Não-caracteristicidade no caso linear).** Diremos que o problema (1.3) para o operador linear  $L$  é **característico** no ponto  $x_0 \in \tilde{S}$  se  $\nu(x_0) \in \text{char}_{x_0}(L)$ ; diremos que é **não-característico** se  $\nu(x_0) \notin \text{char}_{x_0}(L)$ .

Como esta definição depende apenas de  $L$  e  $\tilde{S}$ , dizemos também que  $\tilde{S}$  é **característica** (ou **não-característica**) com respeito a  $L$ , no ponto  $x_0$ . Dizemos enfim que  $\tilde{S}$  é **não-característica** se é não-característica em todo seu ponto.

**Observação 1.13.** Os operadores elípticos de ordem  $k$  terão então a propriedade de ser realmente de ordem  $k$  em qualquer direção, não tendo direções nas quais a ordem é menor: os problemas de Cauchy para operadores elípticos serão sempre não-característicos.  $\triangleleft$

**Observação 1.14.** A definição 1.12 vale também no caso caso semilinear, já que depende apenas dos termos de grau máximo, que são lineares.  $\triangleleft$

*Exemplo 1.15.*

1) Seja  $L = \partial_1$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $\chi_L(\xi) = \xi_1$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \xi_1 = 0\}$ . Portanto, uma hipersuperfície  $S$  é característica se o vetor  $e_1$  é tangente a  $S$ ; de fato,  $\partial_1$  é explícito na equação, enquanto  $\partial_2, \dots, \partial_n$  não aparecem.

2) Seja  $L = \frac{\partial_1 + \partial_2}{\sqrt{2}}$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então  $\chi_L(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 + \xi_2)$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \xi_1 =$



$-\xi_2$ }: plano ortogonal a  $(1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n$  (observe que é simplesmente o operador do exemplo 1 com uma rotação de  $\frac{\pi}{4}$ ).

3) Seja  $L = \partial_1 \partial_2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $\chi_L(\xi) = \xi_1 \xi_2$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \xi_1 = 0 \text{ ou } \xi_2 = 0\}$  (duas retas ortogonais). Portanto, uma hipersuperfície  $S$  não é característica se o vetor normal não é horizontal e nem vertical.

4) Seja  $L = \partial_1^2 - \partial_2^2$  (*operador da onda*) em  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $\chi_L(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}; \xi_1 = \pm \xi_2\}$ . Observe que é simplesmente o operador do exemplo (3) com uma rotação de  $\frac{\pi}{4}$ ; de fato, no operador do exemplo (3) as derivadas segundas  $\partial_i^2$  não aparecem, depois da rotação ambas podem ser explicitadas da equação.

5) Seja  $L = \partial_1^2 - \sum_{i=2}^n \partial_i^2$  (*operador da onda*) em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\chi_L(\xi) = \xi_1^2 - \sum_{i=2}^n \xi_i^2$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \xi_1 = \pm \sqrt{\sum_{i=2}^n \xi_i^2}\}$ : é uma superfície conoidal.

6) Seja  $L = \sum_{i=1}^n \partial_i^2$  (*operador Laplaciano*) em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\chi_L(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \emptyset$  (Operador Elíptico, de fato todas as  $\partial_i^2$  são explícitas na equação, e pode-se mostrar que isso não muda mesmo aplicando uma rotação).

7) Seja  $L = \partial_1 - \sum_{i=2}^n \partial_i^2$  (*operador do calor*) em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $\chi_L(\xi) = -\sum_{i=2}^n \xi_i^2$ , ou seja,  $\text{char}(L) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \sum_{i=2}^n \xi_i^2 = 0\} = \{\tau e_1 \in \mathbb{R}^n, \tau \neq 0\}$ , de fato  $\partial_1^2$  falta na equação. ★

### 1.3.2 Não-caracteristicidade para problemas não-lineares

No caso não-linear a noção de não-caracteristicidade não será apenas referida à equação junto com a superfície, mas dependerá também dos dados de Cauchy.

Como antes, o que precisamos é que seja possível obter, da equação, a derivada  $\partial_\nu^k u$  ao longo da superfície dos dados (já que todas as outras derivadas de ordem até  $k$  podem ser obtidas diretamente dos dados) e também numa vizinhança da superfície.

Para obter a condição apropriada aplicaremos o teorema da função implícita: deverá ser possível determinar implicitamente  $\partial_\nu^k u$  em toda uma vizinhança do ponto  $x_0 \in \tilde{S}$ :

Se  $\nu = e_n$  (como no problema (1.5)) e  $\partial_t^k u$  é a última componente do vetor  $(\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$ , então deverá existir uma única (pelo menos localmente) função  $d : V_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$  (onde  $V_{x_0}$  é uma vizinhança de  $x_0$  em  $\mathbb{R}^{n-1} \simeq \{t = 0\}$ ) tal que estejam satisfeitas as hipóteses do teorema da função implícita quando  $d$  está no lugar de  $\partial_\nu^k u$  e as outras derivadas são calculadas do dado de Cauchy:

$$\begin{cases} F \left( x, 0, (\partial^\beta \varphi_i(x))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}} \right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial d} \left( x, 0, (\partial^\beta \varphi_i(x))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}} \right) \neq 0. \end{cases}$$

Voltando ao caso geral do problema (1.3), suponhamos que  $\tilde{S}$  seja dada em forma paramétrica como em (1.11). Para poder escrever a condição precisamos antes obter o vetor  $(\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$  das derivadas parciais em função das derivadas nas direções normal e tangencial

a  $S$ , as quais podem ser calculadas dos dados de Cauchy mais a função incógnita  $d(s)$  que representa  $\partial_\nu^k u$ , isto é, existirá (dependendo apenas da geometria de  $\tilde{S}$ ) uma função  $H$  tal que  $(\partial^\alpha u)|_{|\alpha| \leq k}(g(s)) = H\left(s, (\partial^\beta \varphi_i(s))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}}, d(s)\right)$  em  $\tilde{S}$ ; podemos então definir

$$K\left(s, (\partial^\beta \varphi_i(s))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}}, d(s)\right) := \tilde{F}\left(g(s), H\left(s, (\partial^\beta \varphi_i(s))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}}, d(s)\right)\right).$$

Com esta construção chegamos à

**Definição 1.16 (Não-caracteristicidade no caso não-linear).** *O problema (1.3), com  $\tilde{S}$  dada como em (1.11), será não-característico no ponto  $x_0 = g(s_0) \in \tilde{S}$  se existir uma única (pelo menos localmente) função  $d : V_{s_0} \rightarrow \mathbb{R}$  (onde  $V_{s_0}$  é uma vizinhança de  $s_0$  em  $\mathbb{R}^{n-1}$ ) tal que*

$$\begin{cases} K\left(s, (\partial^\beta \varphi_i(s))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}}, d(s)\right) = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial d}\left(s, (\partial^\beta \varphi_i(s))_{\substack{|\beta, i| \leq k \\ i \neq k}}, d(s)\right) \neq 0 \end{cases} \quad \text{para } s \in V_{s_0}.$$

Em geral pediremos também que a função  $d$  possa ser obtida de classe  $C^1$ ; veja na observação 1.23 porque.

**Observação 1.17.** É claro que a condição na definição 1.12 implica nesta definição mais geral de não caracteristicidade.  $\triangleleft$

### O caso quasilinear

Quando a equação é quasilinear, a definição 1.16 pode ser verificada numa forma bem mais simples.

Como todas as derivadas de ordem menor que  $k$  em  $\tilde{S}$  são dadas pelos dados de Cauchy, também os coeficientes  $a_\alpha(x, (\partial^{\tilde{\alpha}} u)|_{|\tilde{\alpha}| < k})$  serão conhecidos, de maneira que podemos definir um polinômio característico (que agora depende dos dados de Cauchy) como na definição 1.11, e definir não-caracteristicidade como no caso linear, isto é pedindo  $\chi(\nu) \neq 0$  onde  $\nu$  é a normal a  $\tilde{S}$ : isso como vimos será suficiente a garantir que a equação pode ser resolvida com respeito a  $\partial_\nu^k u$  em  $\tilde{S}$ .

*Exemplo 1.18.* Consideremos os seguintes Problemas de Cauchy:

$$a) \begin{cases} uu_x + u_t = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad b) \begin{cases} uu_x + u_t = 0 \\ u(0, t) = \psi(t) \end{cases}.$$

No caso (a) a derivada normal é  $u_t$ , que pode evidentemente ser explicitada como  $u_t = -uu_x = -\varphi\varphi'$ , de fato, como  $F(x, t, u, u_x, u_t) = uu_x + u_t$  temos trivialmente  $\frac{\partial F}{\partial(u_t)} = 1$  e de  $F = 0$  obtemos  $u_t$ .

Como o problema é quasilinear, podemos também calcular o polinômio característico substituindo os dados nos coeficientes: o polinômio será  $\chi_{(x,0)}(\xi, \eta) = \varphi(x)\xi + \eta$ , assim o problema é não-característico já que  $\chi(0, 1) = 1$ .

No caso (b) a derivada normal seria  $u_x$ , neste caso  $\frac{\partial F}{\partial(u_x)}(x, t, \psi, u_x, \psi') = \psi$ , nos dando a condição  $\psi \neq 0$ : em seguida, usando  $F = 0$ , podemos calcular  $u_x = -u_t/u = -\psi'/\psi$ .

Considerando o polinômio característico temos  $\chi_{(0,t)}(\xi, \eta) = \psi(t)\xi + \eta$ : obtemos também que a condição de não-caracteristicidade é  $\chi(1, 0) = \psi \neq 0$ .

Consideremos agora os problemas totalmente não-lineares

$$c) \begin{cases} u_t^2 + u_x^2 = 1 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}, \quad d) \begin{cases} u_t^2 + u_x^2 = 1 \\ u(\gamma(s)) = \psi(s) : \quad \gamma(s) = (s, s)/\sqrt{2} \end{cases}.$$

No caso (c),  $F(x, t, u, u_x, u_t)|_S = F(x, 0, \varphi, \varphi', u_t) = (\varphi')^2 + (u_t)^2 - 1$ , então  $\frac{\partial F}{\partial(u_t)} = 2u_t$  e  $F = 0$  implica  $u_t = \pm\sqrt{1 - (\varphi')^2}$ .

Deduzimos que o problema terá sentido apenas para  $|\varphi'| \leq 1$ , mas para ser não-característico precisaremos a condição  $|\varphi'| \neq 1$  e, além disso, restringir a equação à condição  $u_t \geq 0$  ou  $u_t \leq 0$  para que exista apenas uma determinação para  $u_t$ .

Por ser totalmente não-linear não podemos neste caso usar o polinômio característico.

No caso (d), pela regra da cadeia

$$\psi'(s) = [u_t(\gamma(s)) + u_x(\gamma(s))]/\sqrt{2}, \quad \nu = (1, -1)/\sqrt{2}, \quad u_\nu(\gamma(s)) = [u_x(\gamma(s)) - u_t(\gamma(s))]/\sqrt{2},$$

das quais obtemos

$$u_x = (u_\nu + \psi')/\sqrt{2} \quad e \quad u_t = (\psi' - u_\nu)/\sqrt{2};$$

usando a notação da seção 1.3.2 com  $d = u_\nu$ , temos  $H(s, \psi, \psi', u_\nu) = (0, u_\nu + \psi', \psi' - u_\nu)/\sqrt{2}$  e substituindo na equação obtemos

$$\begin{cases} K(s, \psi, \psi', u_\nu) = u_\nu^2 + (\psi')^2 - 1 = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial(u_\nu)}(s, \psi, \psi', u_\nu) = 2u_\nu \neq 0, \end{cases}$$

assim a condição será  $|\psi'| < 1$  (observe-se que o resultado é o mesmo do caso (c) já que a equação é invariante por rotações).

Observe que nestes últimos exemplos, até no caso  $|\psi'| = 1$  é possível determinar univocamente  $u_\nu = 0$  na reta dos dados, o que não podemos fazer é resolver com respeito a  $u_\nu$  em vizinhança de  $u_\nu = 0$ , pois falta a segunda hipótese do teorema da função implícita.

★

*Exercício 1.19.* Dados o vetor unitário  $\nu \in \mathbb{R}^n$  e  $k \in \mathbb{N}$ , escreva a fórmula para a derivada  $k$ -ésima na direção  $\nu$ :  $\partial_\nu^k$ .

**Possível solução:** seja  $J$  uma matriz ortonormal cuja primeira linha é  $\nu$ .

Assim, aplicando a mudança de variáveis  $y = Jx$  obtemos que o vetor  $x = \nu$  é aplicado no vetor  $y = e_1$ , logo a derivada na direção  $\nu$  corresponde à derivada na direção  $y_1$ , quando escrita nas novas variáveis  $y$ , isto é,  $\partial_\nu^k = \partial_y^{ke_1}$ .

Como  $\partial_x = J^t \partial_y$  e  $J$  é ortonormal, obtemos  $\partial_y = J \partial_x$  e  $\partial_\nu^k = \partial_y^{ke_1} = [J \partial_x]^{ke_1}$ , isto é, a potencia  $k$ -ésima da primeira componente do produto  $J \partial_x$ , que vale  $\nu \cdot \partial_x$ ; aplicando a fórmula de Leibnitz (1.1) obtemos

$$\partial_\nu^k = (\nu \cdot \partial_x)^k = \left( \sum_{j=1}^n \nu_j \partial_{x_j} \right)^k = \sum_{\substack{\alpha \in MI_n \\ |\alpha|=k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (\nu \partial_x)^\alpha.$$

onde  $\nu \partial_x$  é o vetor de componentes  $\nu_i \partial_{x_i}$ .

★

## 1.4 O Teorema de Cauchy-Kowalevski

Nesta seção enunciaremos e demonstraremos o teorema de Cauchy-Kowalevski. Antes disso precisaremos obter alguns resultados preliminares.

### 1.4.1 Transformação de um problema escalar num sistema

Lembramos que no caso de EDOs, é sempre possível transformar uma equação diferencial de ordem  $k$  num sistema de primeira ordem em  $k$  incógnitas, de maneira que exista uma correspondência 1-a-1 entre as soluções (em particular, dado um problema de Cauchy para a equação podemos transformá-lo num problema de Cauchy equivalente para o sistema).

Queremos fazer algo análogo com as EDPs, mas veremos que neste caso obteremos equivalência apenas entre dois problemas de Cauchy, e não entre equação e sistema sem dados.

**Teorema 1.20.** *Dado o problema de Cauchy não-característico (de ordem  $k$ , em  $n$  variáveis, resolvido com respeito a  $\partial_t^k u$ )*

$$\begin{cases} \partial_t^k u = F\left(x, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}}\right) \\ \partial_t^j u(x, 0) = \varphi_j(x) \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (j = 0, 1, \dots, k-1) \quad (1.14)$$

com  $F \in \mathcal{C}^1$ ,  $\varphi_j \in \mathcal{C}^{k+1-j}$ , existe um problema de Cauchy para um sistema de primeira ordem na forma

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x, t, Y) \partial_{x_i} Y + B(x, t, Y) \\ Y(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (1.15)$$

tal que existe uma relação bijetora entre as soluções  $\mathcal{C}^{k+1}$  de (1.14) e as soluções  $\mathcal{C}^1$  de (1.15).

**Observação 1.21.** O sistema (1.15) será um sistema de  $N := N_n(k)$  equações em  $N_n(k)$  incógnitas ( $A_i$  serão matrizes de funções e  $B$  e  $\Phi$  serão vetores de funções). A forma do sistema é dita canônica, pois no termo de esquerda aparecem apenas as derivadas com respeito a uma variável (a  $t$ ) que não aparecem a direita. O sistema é quasilinear, já que os coeficientes das derivadas primeiras dependem apenas de  $x, t$  e  $Y$ .  $\triangleleft$

*Demonstração do teorema 1.20.* A prova será em 2 passos: primeiro construiremos o sistema (1.15) de maneira que a uma solução de (1.14) corresponda uma de (1.15), em seguida mostraremos a correspondência inversa.

A construção do sistema será feita de maneira que se  $u \in \mathcal{C}^{k+1}$  é solução de (1.14) então o vetor  $Y = (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k} \in \mathcal{C}^1$  será solução de (1.15); as componentes de  $Y$  serão denotadas por  $y_\alpha$ .

Teremos três tipos de equações:

(a) já que  $\partial_t(\partial^\alpha u) = \partial^{\alpha+e_n} u$ , escrevemos as  $N_n(k-1)$  equações

$$\partial_t y_\alpha = y_{\alpha+e_n} \quad \text{para todo } \alpha \in MI_n \text{ com } |\alpha| < k; \quad (1.16)$$

(b) já que  $u \in \mathcal{C}^{k+1}$ , denotando por  $i_\alpha$  o primeiro índice de  $\alpha$  tal que  $\alpha_{i_\alpha} \neq 0$ , vale  $\partial_t(\partial^\alpha u) = \partial_{x_{i_\alpha}} \partial^{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}} u$  para  $|\alpha| \leq k$ ; então escrevemos as  $N_n(k) - N_n(k-1) - 1$  equações

$$\partial_t y_\alpha = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}} \quad \text{para todo } \alpha \in MI_n \text{ com } |\alpha| = k \text{ e } \alpha \neq ke_n; \quad (1.17)$$

(c) já que

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_t^k u) &= \partial_t \left[ F \left( x, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} \left( x, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}} \right) + \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} \left( x, t, (\partial^\alpha u)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}} \right) \partial_t(\partial^\alpha u), \end{aligned} \quad (1.18)$$

onde  $\frac{\partial F}{\partial y_\alpha}$  é a derivada parcial da função  $F$  com respeito à variável que corresponde a  $(\partial^\alpha u)$  e  $\frac{\partial F}{\partial t}$  é a com respeito à variável espacial  $t$ , podemos obter a última equação de (1.18), substituindo as componentes do vetor  $Y$  em  $F$  e usando (1.16-1.17) para exprimir  $\partial_t Y$  apenas em termos de  $Y$  e  $\partial_x Y$ : (denotamos a seguir por  $\widehat{Y}$  o vetor  $(y_\alpha)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ \alpha \neq ke_n}}$ )

$$\partial_t y_{ke_n} = \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \widehat{Y}) + \sum_{|\alpha| < k} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) y_{\alpha+e_n} + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \neq ke_n}} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}}. \quad (1.19)$$

Observe-se que o sistema obtido pode ser escrito na forma (1.15): o lado direito das equações (1.16) fará parte do vetor  $B$ , o das equações (1.17) pode ser posto na forma  $\sum_{i=1}^{n-1} A_i(x, t, Y) \partial_{x_i} Y$ , e a última linha do vetor  $B$  e das matrizes  $A_i$  (que representam a equação (1.19)) seriam tais que

$$\begin{aligned} B_N(x, t, Y) &= \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \widehat{Y}) + \sum_{|\alpha| < k} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) y_{\alpha+e_n}, \\ \sum_{i=1}^{n-1} [A_i]_N(x, t, Y) \partial_{x_i} Y &= \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \neq ke_n}} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}}. \end{aligned}$$

Os dados de Cauchy para  $Y$  podem ser calculados dos dados para  $u$ , exceto  $y_{ke_n}$  que deverá ser obtido da equação (já que por hipótese o problema é não-característico):

$$y_\alpha(x, 0) = y_{(\beta, j)}(x, 0) = \begin{cases} \partial^\beta \phi_j(x) & \text{se } \alpha \neq ke_n \\ F(x, 0, (\partial^\beta \varphi_j(x))_{\substack{|\beta, j| \leq k \\ j \neq k}}}) & \text{se } \alpha = ke_n = (0, k). \end{cases} \quad (1.20)$$

Com o sistema definido assim,  $Y$  será solução de (1.15) por construção.

Agora mostremos que dada uma solução  $Y \in \mathcal{C}^1$  de (1.15), a componente  $u := y_0$  será uma solução  $\mathcal{C}^{k+1}$  de (1.14). Observe-se que

(i) Iterando as equações (1.16), obtemos

$$y_{\alpha+je_n} = \partial_t^j y_\alpha \quad \text{para } |\alpha| + j \leq k. \quad (1.21)$$

(ii) Se  $|\alpha| = k$  e  $\alpha \neq ke_n$ , então usando (1.17) e a equação acima temos  $\partial_t y_\alpha = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}} = \partial_t \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}}$ ; integrando com respeito a  $t$  obtemos  $y_\alpha(x, t) = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}}(x, t) + C_\alpha(x)$ ; para calcular  $C_\alpha$  usamos a condição (1.20):

$$y_\alpha(x, 0) = \partial^\beta \varphi_j(x) = \partial_{x_{i_\alpha}} \partial^{\beta-e_{i_\alpha}} \varphi_j(x) = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}}(x, 0),$$

concluimos assim que  $C_\alpha(x) = 0$  e que

$$y_\alpha(x, t) = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}}(x, t) \quad \text{para } |\alpha| = k \text{ e } \alpha \neq ke_n. \quad (1.22)$$

Agora, substituindo em (1.19) as equações acima (em particular  $y_{\alpha+e_n} = \partial_t y_\alpha$  se  $|\alpha| < k$  e  $\partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha+e_n-e_{i_\alpha}} = \partial_t \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}} = \partial_t y_\alpha$  se  $|\alpha| = k$  e  $\alpha \neq ke_n$ ) obtemos

$$\begin{aligned} \partial_t y_{ke_n} &= \frac{\partial F}{\partial t}(x, t, \widehat{Y}) + \sum_{|\alpha| < k} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} + \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ \alpha \neq ke_n}} \frac{\partial F}{\partial y_\alpha}(x, t, \widehat{Y}) \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [F(x, t, \widehat{Y}(x, t))]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Integrando (1.23) obtemos,  $y_{ke_n}(x, t) = F(x, t, \widehat{Y}(x, t)) + C_{ke_n}(x)$  e de novo obtemos  $C_{ke_n}(x) = 0$  usando a condição (1.20):  $y_{ke_n}(x, 0) = F(x, 0, (\partial^\beta \varphi_j(x))_{\substack{|\beta, j| \leq k \\ j \neq k}}}) = F(x, 0, \widehat{Y}(x, 0))$ ; concluimos

$$y_{ke_n}(x, t) = F(x, t, \widehat{Y}(x, t)). \quad (1.24)$$

Como por (1.21)  $y_{ke_n} = \partial_t^k y_0$ , a equação (1.24) implicará que  $y_0$  é solução de (1.14) se mostrarmos que  $y_\alpha = \partial^\alpha y_0$  sempre que  $|\alpha| \leq k$ . Além disso,  $y_0$  será de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  já que todas suas derivadas até a ordem  $k$  são  $\mathcal{C}^1$ .

Mostremos primeiro, por indução, que

$$y_\alpha = \partial_{x_{i_\alpha}} y_{\alpha-e_{i_\alpha}} \quad \text{para } 0 < |\alpha| \leq k \text{ e } \alpha \neq (0, |\alpha|). \quad (1.25)$$

Se  $|\alpha| = k$  a afirmação corresponde a (1.22). Se supusermos que (1.25) é verdadeira quando  $|\alpha| = j > 1$ , então, se  $|\tilde{\alpha}| = j - 1$ , temos  $\partial_t y_{\tilde{\alpha}} \stackrel{(1.21)}{=} y_{\tilde{\alpha}+e_n} \stackrel{\text{ind}}{=} \partial_{x_{i_{\tilde{\alpha}}}} y_{\tilde{\alpha}+e_n-e_{i_{\tilde{\alpha}}}} \stackrel{(1.21)}{=} \partial_t \partial_{x_{i_{\tilde{\alpha}}}} y_{\tilde{\alpha}-e_{i_{\tilde{\alpha}}}}$ ; de novo integrando com respeito a  $t$  obtemos  $y_{\tilde{\alpha}}(x, t) = \partial_{x_{i_{\tilde{\alpha}}}} y_{\tilde{\alpha}-e_{i_{\tilde{\alpha}}}}(x, t) + C_{\tilde{\alpha}}(x)$  e mostramos que  $C_{\tilde{\alpha}} = 0$  usando (1.20).

Agora a afirmação  $y_\alpha = \partial^\alpha y_0$  sempre que  $|\alpha| \leq k$  é obtida iterando (1.21) e (1.25) até zerar todos os índices. □

**Observação 1.22.** Observe-se que, como comentado, a solução do sistema torna-se solução da equação graças às condições iniciais: se considerássemos apenas equação e sistema sem condições, então não teria como garantir a relação  $y_\alpha = \partial^\alpha y_0$  entre as componentes de  $Y$ , de maneira que  $y_0$  não seria em geral solução da equação: apenas se estas relações estão satisfeitas em  $t = 0$  podemos garantir que elas serão conservadas. ◁

**Observação 1.23.** As regularidades para  $F$  e  $\varphi_j$  pedidas no teorema são necessárias para poder derivar  $F$  em (1.18) e para que a solução possa ser de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ . Note-se que é para ter essa regularidade da  $F$  que, na definição de não-caracteristicidade 1.16, precisa pedir que seja possível determinar a função  $d$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Destacamos também que se considerarmos o problema na forma (1.3) e quisermos transformá-lo na forma (1.5) de maneira que as hipóteses do teorema 1.20 estejam satisfeitas, precisaremos pedir também que  $\tilde{S}$  seja de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ , de maneira que a mudança de variáveis que a leva no plano  $\{t = 0\}$  possa ser escolhida de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  e a regularidade dos dados seja preservada.  $\triangleleft$

*Exemplo 1.24.* Consideremos o problema de ordem 2

$$\begin{cases} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}) = u_{yy} \\ u(x, 0) = f(x), u_y(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

Denotaremos as incógnitas do sistema por  $Y = (v, p, q, r, s, t)^t$  que deverão corresponder a

$$v = u, p = u_x, q = u_y, r = u_{xx}, s = u_{xy}, t = u_{yy}.$$

As equações do tipo (1.16) serão

$$\partial_y v = q, \quad \partial_y p = s, \quad \partial_y q = t;$$

as do tipo (1.17)

$$\partial_y r = \partial_x s, \quad \partial_y s = \partial_x t;$$

enfim teremos

$$\partial_y t = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} q + \frac{\partial F}{\partial(u_x)} s + \frac{\partial F}{\partial(u_y)} t + \frac{\partial F}{\partial(u_{xx})} \partial_x s + \frac{\partial F}{\partial(u_{xy})} \partial_x t,$$

com as condições

- $u(x, 0) = f(x), \quad p(x, 0) = f'(x), \quad r(x, 0) = f''(x),$
- $q(x, 0) = g(x), \quad s(x, 0) = g'(x),$
- $t(x, 0) = F(x, 0, f, f', g, f'', g').$

Observemos que desta maneira o sistema resultante será

$$\partial_y \begin{bmatrix} v \\ p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F}{\partial(u_{xx})} & \frac{\partial F}{\partial(u_{xy})} \end{bmatrix} \partial_x \begin{bmatrix} v \\ p \\ q \\ r \\ s \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q \\ s \\ t \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} q + \frac{\partial F}{\partial(u_x)} s + \frac{\partial F}{\partial(u_y)} t \end{bmatrix}.$$

Vejamos alguns casos específicos.

- Se a equação for  $u_{yy} = u_{xx} + G(u)$  (eq. da onda semilinear), como última equação do sistema obtemos,  $\partial_y t = \partial_x s + G'(u)q$  e o dado para  $t$  será  $t(x, 0) = f'' + G(f(x))$ .
- Se a equação for  $u_{yy} = -u_{xx} + G(y)$  (Laplaciano linear) obtemos, respectivamente,  $\partial_y t = -\partial_x s + G'(y)$  e  $t(x, 0) = -f'' + G(0)$ .
- Se a equação for  $u_{yy} = u_x$  (eq. do calor) obtemos, respectivamente,  $\partial_y t = s$  e  $t(x, 0) = f'(x)$ .

★

### 1.4.2 Outras formas para o sistema equivalente

O problema (1.14) pode ser posto em forma de sistema equivalente de outras formas, em particular na forma com dados de Cauchy homogêneos e coeficientes independentes de  $t$ :

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(x, Y) \partial_{x_i} Y + B(x, Y) \\ Y(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (1.26)$$

e na forma autônoma (coeficientes independentes das variáveis) e sem termo  $B$

$$\begin{cases} \partial_t Y = \sum_{i=1}^{n-1} A_i(Y) \partial_{x_i} Y \\ Y(x, 0) = \Psi(x) \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1}. \quad (1.27)$$

Para obter a forma (1.26) é suficiente fazer uma mudança de incógnitas usando como novas incógnitas  $Y(x, t) - \Phi(x)$ , para obter as condições homogêneas, e em seguida introduzir uma nova incógnita  $y_{-1}$  junto com a equação  $\partial_t y_{-1} = 1$  e o dado  $y_{-1}(x, 0) = 0$ . Dessa maneira  $y_{-1}(x, t) = t$  e substituindo  $y_{-1}$  à variável  $t$  no sistema original os coeficientes não dependem mais de  $t$ . O sistema terá então  $N + 1$  incógnitas e equações.

Para obter a forma (1.27) precisaremos introduzir  $n$  novas incógnitas (no lugar de  $y_{-1}$ ) que substituam todas as variáveis: chamando as incógnitas de  $\xi_1, \dots, \xi_n$  as equações e condições serão

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = 0 & i = 1, \dots, n-1 \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \xi_i(x, 0) = x_i & i = 1, \dots, n-1 \\ \xi_n(x, 0) = 0 \end{cases}.$$

O sistema terá então  $N + n$  incógnitas e equações. Para eliminar o termo  $B$  é suficiente observar que  $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} = 1$  de maneira que o vetor  $B$  pode ser posto na coluna de  $A_1$  que multiplica  $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}$ .

Observe-se que não será possível obter a forma (1.27) com condições homogêneas, já que as condições para as  $\xi_i$  não serão homogêneas.

### 1.4.3 O Teorema de Cauchy-Kowalevski

Podemos agora demonstrar o seguinte teorema:



**Teorema 1.25.** (*Cauchy-Kowalevski*) *Se no Problema (1.3) os dados  $\tilde{\varphi}_j$  e a superfície  $\tilde{S}$  são analíticos em vizinhança de  $\tilde{x}_0 \in \tilde{S}$ , a função  $\tilde{F}$  é analítica em vizinhança destes dados e a condição de não-caracteristicidade está satisfeita em  $\tilde{x}_0 \in \tilde{S}$ , então existe uma vizinhança de  $\tilde{x}_0$  na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.*

Observe-se que, usando uma mudança de variáveis analítica, podemos sempre transformar o problema (1.3) no problema (1.5), mantendo a analiticidade e levando  $x_0$  na origem. Em seguida podemos (pela hipótese de não-caracteristicidade) resolver com respeito a  $\partial_t^k u$  e obter o sistema equivalente na forma (1.26), ainda mantendo a analiticidade. Por isso podemos reformular o teorema 1.25 na seguinte forma:

**Teorema 1.26.** (*Cauchy-Kowalevski em versão sistema*) *Se no Problema (1.26) as funções  $A_i, B$  são analíticas em vizinhança da origem  $(x, Y) = (0, 0)$ , então existe uma vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^n$  na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.*

*Demonstração do teorema 1.26.* Precisamos calcular todas as  $\partial^{(\beta,j)}Y|_{x=0,t=0}$  para  $\beta \in MI_{n-1}$  e  $j \geq 0$ .

Para  $j = 0$  elas são calculadas diretamente dos dados de Cauchy, que sendo nulos dão  $\partial^{(\beta,0)}Y(0,0) = 0$  para todo  $\beta \in MI_{n-1}$ .

Para  $j > 0$  podemos calculá-las usando a equação, em função das derivadas já calculadas:

$$\begin{aligned} \partial^{(\beta,j)}Y(0,0) &= (\partial^{(\beta,j-1)}\partial_t Y)|_{(x=0,t=0)} = \\ &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} \partial^{(\beta,j-1)} [A_i(x,Y)\partial_{x_i}Y] + \partial^{(\beta,j-1)}B(x,Y) \right) \Big|_{(x=0,t=0)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Nesta expressão (1.28) aparecem (observe que pelos dados  $Y(0,0) = 0$ , então todas as derivadas serão calculadas na origem)

- As derivadas das  $A_i$  e da  $B$  com respeito  $Y$ , calculadas em  $x = 0, Y = 0$ , até a ordem  $|\beta| + j - 1$ ;
- As derivadas das  $A_i$  e da  $B$  com respeito a  $x$ , calculadas em  $x = 0, Y = 0$ , até a ordem  $|\beta|$ ;
- As derivadas das  $Y$ , calculadas em  $x = 0, Y = 0$ , com multi-índices até  $(\beta, j-1)$  (provindo da derivação das  $A_i(x, Y)$  e de  $B$ ) e com multi-índices até  $(\beta + e_i, j - 1)$  (provindo da derivação de  $\partial_{x_i}Y$ ).

Como todas as derivadas das  $A_i$  e de  $B$  e as com  $j = 0$  de  $Y$  existem por hipótese e são dados do problema, podemos usar (1.28) para calcular iterativamente  $\partial^{(\beta,j)}Y(0,0)$  em função das mesmas derivadas até a ordem (com respeito a  $t$ )  $j - 1$ .

É fundamental perceber que (1.28) exprime  $\partial^{(\beta,j)}Y(0,0)$  como um *polinômio a coeficientes inteiros não-negativos* de variáveis as derivadas nos ponto (a-b-c) acima, já que a fórmula é apenas a aplicação repetida da regra da cadeia; por indução, as próprias derivadas de  $Y$  de ordem (com respeito a  $t$ ) inferior a  $j$  são expressas por um polinômio a coeficientes inteiros não-negativos de variáveis as derivadas na origem das  $A_i$  e de  $B$ , de maneira que podemos concluir

que existem polinômios  $P_{m,\beta,j}$  e coeficientes inteiros não-negativos tais que  $\partial^{(\beta,j)}Y_m(0,0) = P_{m,\beta,j}(\dots)$  onde as variáveis do polinômio são os coeficientes de Taylor das  $A_i$  e de  $B$  na origem, enquanto os coeficientes do polinômio dependem apenas da estrutura do problema (ordem  $k$  e dimensão espacial  $n$ ) e não das funções  $A, B$  (veja mais a frente a equação (1.38)).

A este ponto já podemos mostrar a **unicidade da solução analítica**: de fato, se existir uma solução analítica esta deverá coincidir com sua série de Taylor numa oportuna vizinhança da origem, e mostramos que os coeficientes dessa série  $\partial^{(\beta,j)}Y(0,0)$  são univocamente determinadas pelos coeficientes de Taylor dos dados.

Para mostrar a **existência da solução analítica** precisaremos mostrar que essa série converge em uma oportuna vizinhança da origem; faremos isso calculando explicitamente a solução de um caso particular que resultará ser dada por uma série convergente e majorante da série da solução que procuramos, implicando na convergência desta última.

Fixemos uma notação para as séries envolvidas: cada componente  $y_m$  do vetor  $Y$  (se for analítica) será

$$y_m(x, t) = \sum_{\alpha=(\beta,j) \in MI_n} C_{(\beta,j)}^m \frac{x^\beta t^j}{\beta! j!} : \quad m = 1, \dots, N \quad (1.29)$$

(aqui  $N$  representa o número de incógnitas do sistema (1.26)).

Por hipótese, cada componente de  $B$  e das  $A_i$  é analítica: são  $N + (n-1)N^2$  funções que por simplicidade denotaremos por  $\mathcal{A}_\delta$  :  $\delta = 1, \dots, N + (n-1)N^2$ ; logo podem ser escritas como

$$\mathcal{A}_\delta(x, Y) = \sum_{\substack{\beta \in MI_{n-1} \\ \gamma \in MI_N}} d_{\beta,\gamma}^\delta \frac{x^\beta Y^\gamma}{\beta! \gamma!} : \quad \delta = 1, \dots, N + (n-1)N^2 \quad (1.30)$$

e cada série converge numa oportuna vizinhança da origem, logo existe existe  $\xi > 0$  tal que todas convergem no ponto  $(x, Y) = (\xi, \xi, \dots, \xi, \xi, \xi, \dots, \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^N$  e, como para as séries convergirem seus termos devem ser limitados, existe  $M > 0$  tal que

$$\left| d_{\beta,\gamma}^\delta \frac{\xi^{|\beta|+|\gamma|}}{\beta! \gamma!} \right| \leq M. \quad \text{para todo } \delta, \beta, \gamma.$$

Seja agora

$$\tilde{a}(x, Y) = \sum_{\substack{\beta \in MI_{n-1} \\ \gamma \in MI_N}} M \frac{(|\beta| + |\gamma|)!}{\beta! \gamma!} \frac{x^\beta Y^\gamma}{\xi^{|\beta|+|\gamma|}}; \quad (1.31)$$

como

$$\left| \frac{d_{\beta,\gamma}^\delta}{\beta! \gamma!} \right| \leq \frac{M}{\xi^{|\beta|+|\gamma|}} \leq \frac{M}{\xi^{|\beta|+|\gamma|}} \frac{(|\beta| + |\gamma|)!}{\beta! \gamma!}, \quad (1.32)$$

a série (1.31) é majorante de todas as séries (1.30). Por outro lado,  $\tilde{a}(x, Y)$  pode ser calculada

explicitamente usando a fórmula de Leibnitz (1.1):

$$\begin{aligned} \tilde{a}(x, Y) &= M \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\xi^j} \sum_{\substack{\beta \in MI_{n-1}, \\ \gamma \in MI_N, \\ |(\beta, \gamma)|=j}} \left( \frac{|(\beta, \gamma)|!}{\beta! \gamma!} \right) x^\beta Y^\gamma \\ &= M \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\sum x_i + \sum Y_i)^j}{\xi^j} \\ &= \frac{M}{1 - \left( \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + Y_1 + \dots + Y_N}{\xi} \right)} = \frac{M\xi}{\xi - (x_1 + \dots + x_{n-1} + Y_1 + \dots + Y_N)}; \end{aligned}$$

como esta série converge para  $|\sum x_i + \sum Y_i| < \xi$ , logo também converge no cubo  $|x_i|, |Y_j| < \frac{\xi}{n-1+N}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Consideremos agora o problema

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{Y} = \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{A}_i(x, \tilde{Y}) \partial_{x_i} \tilde{Y} + \tilde{B}(x, \tilde{Y}) \\ \tilde{Y}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n-1} \tag{1.33}$$

onde  $\tilde{A}_i$  e  $\tilde{B}$  são matrizes e vetor do mesmo tamanho de  $A_i$  e  $B$  mas cujas entradas são todas iguais a  $\tilde{a}(x, Y)$ , de maneira que (1.33) é composto por  $N$  equações todas iguais a

$$\partial_t \tilde{y}_m = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=1}^N \tilde{a}(x, \tilde{Y}) \partial_{x_i} \tilde{y}_l \right) + \tilde{a}(x, \tilde{Y}).$$

Se procuramos por uma solução na forma

$$\tilde{Y}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} z \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i, t \right), \tag{1.34}$$

isto é, com as  $\tilde{y}_m$  todas iguais e dependendo apenas de  $s := \sum_{i=1}^{n-1} x_i$  e de  $t$ , então obtemos o problema (note que  $\partial_{x_i} \tilde{y}_m = \partial_s z \frac{\partial s}{\partial x_i} = \partial_s z$ )

$$\begin{cases} \partial_t z = N(n-1) \tilde{a}(x, \tilde{Y}) \partial_s z + \tilde{a}(x, \tilde{Y}) \\ = \frac{M\xi}{\xi - s - Nz} (N(n-1) \partial_s z + 1), \\ z(s, 0) = 0. \end{cases} \tag{1.35}$$

Este é um problema de Cauchy para uma EDP de primeira ordem em duas variáveis. Assim podemos obter a solução (veja as contas depois da demonstração)

$$z(s, t) = \frac{(\xi - s) - \sqrt{(\xi - s)^2 - 2M\xi Nnt}}{Nn}. \tag{1.36}$$

Esta função é analítica perto de  $(s, t) = (0, 0)$ , então também a  $\tilde{Y}$  correspondente (veja (1.34)) será analítica e como já mostramos a unicidade da solução analítica, deduzimos que as séries de Taylor

$$\tilde{y}_m(x, t) = \sum_{\alpha=(\beta,j) \in MI_n} \tilde{C}_{(\beta,j)}^m \frac{x^\beta t^j}{\beta! j!}, \quad (1.37)$$

coincidem com as que podemos calcular dos coeficientes de Taylor de  $\tilde{a}$  e convergem numa vizinhança da origem.

Os coeficientes  $C$  e  $\tilde{C}$  em (1.29) e (1.37) dependem, pela mesma fórmula, dos coeficientes de Taylor de  $A_i, B$  e de  $\tilde{A}_i, \tilde{B}$ , respectivamente:

$$\begin{aligned} C_{(\beta,j)}^m &= P_{m,\beta,j}(\{d_{\beta',\gamma}^\delta\}) \\ \tilde{C}_{(\beta,j)}^m &= P_{m,\beta,j}(\{\tilde{d}_{\beta',\gamma}^\delta\}), \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde por (1.31)  $\tilde{d}_{\beta,\gamma}^\delta = \frac{M(|\beta|+|\gamma|)!}{\xi^{|\beta|+|\gamma|}}$  e por (1.32)  $|d_{\beta,\gamma}^\delta| \leq \tilde{d}_{\beta,\gamma}^\delta$ .

Como os polinômios  $P_{m,\beta,j}$  são os mesmos e são a coeficientes inteiros e não-negativos, obtemos

$$|C_{(\beta,j)}^m| = |P_{m,\beta,j}(\{d_{\beta',\gamma}^\delta\})| \leq P_{m,\beta,j}(\{|d_{\beta',\gamma}^\delta|\}) \leq P_{m,\beta,j}(\{\tilde{d}_{\beta',\gamma}^\delta\}) = \tilde{C}_{(\beta,j)}^m.$$

Logo, as séries (1.29) convergem onde converge (1.37) e definem uma solução analítica de (1.26) numa vizinhança da origem.  $\square$

**Observação 1.27.** È possível estimar a região de convergência da solução analítica obtida na prova anterior. De fato, a série de  $\sqrt{1+x}$  converge se  $|x| < 1$ . Assim podemos garantir que a série de  $\sqrt{(1-s/\xi)^2 - 2MNnt/\xi}$  convirja impondo  $|s| < \frac{\xi}{2}$  (que implica  $(1-s/\xi)^2 > \frac{1}{4}$ ) e  $|2MNnt| < \frac{\xi}{4}$ : uma condição suficiente é então

$$|x_i| < \frac{\xi}{2(n-1)} \quad \text{para todo } i \text{ e } |t| < \frac{\xi}{8MNn}.$$

Em particular, o raio de convergência depende de  $\xi$  e  $M$ , isto é, das funções  $A_i$  e  $B$  (e dos dados de Cauchy já que o problema (1.26) é obtido do problema original com dados não homogêneos via mudança de incógnitas e de variáveis), e também de  $n, N$ , isto é, da ordem e número de variáveis do problema original.  $\triangleleft$

*Resolução de (1.35).* Podemos reescrever (1.35) como

$$-M\xi N(n-1)(z_s) + (\xi - s - Nz)(z_t) = M\xi :$$

o problema é não característico pois para  $s$  e  $z$  perto de 0 o coeficiente  $(\xi - s - Nz)$  é não nulo. Aplicando o método das características (veja-se na seção 2.1) obtemos

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = \xi - s - Nz, & t(\sigma, 0) = 0, \\ \frac{ds}{d\tau} = -M\xi N(n-1), & s(\sigma, 0) = \sigma, \\ \frac{dz}{d\tau} = M\xi, & z(\sigma, 0) = 0. \end{cases}$$

Resolvendo as ultimas duas e a seguir a primeira obtemos

$$\begin{cases} z = M\xi\tau & \implies \tau = \frac{z}{M\xi}, \\ s = -M\xi N(n-1)\tau + \sigma & \implies \sigma = s + N(n-1)z, \\ t = \frac{1}{2}M\xi N(n-2)\tau^2 + (\xi - \sigma)\tau. \end{cases}$$

Logo,  $t = N(n-2)\frac{z^2}{2M\xi} + (\xi - s - N(n-1)z)\frac{z}{M\xi}$  da qual obtemos

$$Nnz^2 - 2(\xi - s)z + 2M\xi t = 0;$$

resolvendo temos  $z = \frac{(\xi-s) \pm \sqrt{(\xi-s)^2 - 2M\xi Nnt}}{Nn}$ , mas apenas a determinação com sinal menos satisfaz  $z(s, 0) = 0$  quando  $s$  é perto de 0, assim a solução é

$$z = \frac{(\xi - s) - \sqrt{(\xi - s)^2 - 2M\xi Nnt}}{Nn}.$$

□

**Observação 1.28** (Comentários sobre o Teorema 1.25).

- O teorema 1.25 também vale para  $u$  vetorial (sistemas) ou a valores complexos.
- O teorema considera apenas uma vizinhança de um ponto  $x_0$ , mas se as condições estiverem satisfeitas em toda  $\tilde{S}$  podemos facilmente estender o resultado a uma vizinhança de  $\tilde{S}$ , já que a solução é única em vizinhança de cada ponto e será então a mesma na intersecção de duas delas, podendo assim ser estendida à reunião de todas estas vizinhanças.
- O teorema, pelo menos no âmbito dos problemas de Cauchy analíticos e não-característicos e considerando apenas as soluções analíticas, nos mostra que para ter existência e unicidade é necessário prescrever condições sobre a solução na forma de  $k$  funções de  $n-1$  variáveis (os dados de Cauchy em  $\tilde{S}$ ).
- O teorema tem algumas fortes limitações práticas.
  - No caso de problema analítico, nos dá existência e unicidade, mas apenas de soluções analíticas, não excluindo a existência de outras soluções menos regulares (não analíticas). Veremos porém na seção 1.5 que no caso linear existe apenas a solução analítica.
  - Fornece existência, unicidade e uma fórmula para calcular a série de Taylor da solução, mas poucas informações qualitativas podem ser deduzidas da série. Por exemplo, o teorema se aplica da mesma maneira aos problemas (L) e (O) do exercício 1.6, não distinguindo o fato que o primeiro é mal posto. Além disso, o algoritmo de cálculo dos coeficientes é computacionalmente muito pesado, então pouco útil.
  - O resultado é apenas local, no sentido que temos existência numa vizinhança de  $S$  mas nenhuma informação sobre eventual existência global, ou sobre eventual perda de analiticidade longe de  $S$ .

- Existem problemas de grande interesse físico que não são problemas de Cauchy, como por exemplo o problema de Dirichlet para o Laplaciano e o problema de valores iniciais para a equação do calor (em particular, o problema (C) do exercício 1.6 não é um problemas de Cauchy).
- O fato de ser limitado a dados analíticos limita a importância nas aplicações do teorema, já que as funções analíticas são um conjunto muito pequeno dentro do conjunto onde faz sentido procurar soluções das EDPs, e é suficiente uma pequena perturbação para perder a analiticidade de uma função, de maneira que o estudo da dependência contínua dos dados perde de significado.

Além disso as funções analíticas têm a propriedade que a função inteira depende apenas dos valores num pequeno aberto, o que não é natural em certos fenômenos físicos nos quais as informações viajam com velocidade finita.

- O teorema é muito geral, no sentido que não faz distinções sobre a ordem ou o tipo de equação (por exemplo elipticidade, tipo de não-linearidade, etc..). Isso pode ser uma vantagem, mas também justifica as limitações que enumeramos acima: para obter resultados melhores precisaremos analisar separadamente os diferentes tipos de equações.

◁

## 1.5 O teorema de Holmgren

Nesta seção esboçaremos a demonstração do seguinte teorema

**Teorema 1.29** (Teorema de Holmgren). *Se no Problema (1.3) a equação é linear a coeficientes analíticos,  $\tilde{S}$  é analítica e não-característica e os dados  $\tilde{\varphi}_j$  são funções quaisquer, então, dado um compacto de  $S$ , existe uma vizinhança dele na qual existe no máximo uma solução.*

**Observação 1.30.** O teorema não garante existência, apenas unicidade; se os dados forem analíticos, então a existência é dada pelo teorema de Cauchy-Kowalevski e deduzimos que a solução analítica é mesmo única: não existem soluções menos regulares.

Por outro lado, o teorema de Holmgren mostra que no caso de equações lineares a coeficientes analíticos a unicidade da solução vale também sem a analiticidade dos dados (o que é muito importante nas aplicações já que muitas vezes as equações que descrevem os problemas físicos são de fato lineares a coeficientes constantes e a superfície dos dados pode ser simplesmente um hiperplano, mas a hipótese de analiticidade dos dados é excessivamente restritiva). ◁

O teorema será consequência do lema a seguir:

**Lema 1.31.** *Sejam  $L$  um operador linear a coeficientes analíticos e  $S$  analítica e não-característica. Se  $Lu = 0$  e os dados de Cauchy são nulos em  $S$ , então dado um compacto de  $S$  existe uma vizinhança dele na qual  $u = 0$ .*

*Demonstração do teorema 1.29.* Se  $v, w$  são tais que  $Lv = Lw = f(x)$  e  $v = w = \varphi$  em  $S$ , então  $L(w - v) = 0$  e  $w - v = 0$  em  $S$ . Então, pelo Lema 1.31,  $w = v$ . ◻

Esboçaremos a demonstração do lema 1.31 apenas para um caso particular.

*Esboço da demonstração do lema 1.31.* Consideremos o problema

$$\begin{cases} Lu = a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

e fixemos o compacto  $F = [x_1, x_2] \times \{0\}$  de  $S$ . O polinômio característico é  $\chi_L(\xi_1, \xi_2) = a(x, 0)\xi_1 + b(x, 0)\xi_2$ , então a hipótese de não-caracteristicidade da reta  $y = 0$  diz que  $\chi_L(0, 1) = b(x, 0) \neq 0$ ; como  $b$  é analítico (em particular contínuo), não poderá mudar de sinal, suporemos então  $b(x, 0) > 0$ . Consideremos o *problema dual*

$$\begin{cases} \tilde{L}v = -(a(x, y)v)_x - (b(x, y)v)_y + c(x, y)v = P(x, y) \\ v(\gamma(s)) = 0 \end{cases}$$

onde  $P(x, y)$  é um polinômio, e  $\gamma(s)$  uma curva que cruza a reta  $y = 0$  em  $x_1 - 1$  e  $x_2 + 1$  mas está suficientemente perto dela e com normal suficientemente perto de  $(0, 1)$ , de maneira que o problema dual também seja não-característico (de fato  $\chi_{\tilde{L}}(\xi_1, \xi_2) = \chi_L(\xi_1, \xi_2)$  e como  $a, b$  são analíticas então num oportuno compacto que contém uma vizinhança de  $F$ ,  $a$  é limitada e  $b$  é maior de uma constante positiva; por isso podemos obter  $\gamma$  como desejado).

Agora seja  $\Omega$  a região entre  $\gamma$  e  $\{y = 0\}$ , de maneira que em  $\partial\Omega$  uma entre  $u$  e  $v$  é sempre nula, e calculemos (se tudo fizer sentido)

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega} vLu &= \int_{\Omega} (avu_x + bvu_y + cvu) \, dx dy \\ &= \int_{\Omega} [-(av)_x u - (bv)_y u + cvu] \, dx dy + \int_{\partial\Omega} (auv, buv) \cdot \nu \, dS \\ &= \int_{\Omega} u\tilde{L}v \, dx dy + 0 = \int_{\Omega} uP(x, y) \, dx dy. \end{aligned}$$

Dessa conta podemos deduzir que  $\int_{\Omega} uP \, dx dy = 0$  para todo polinômio  $P$ , logo  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ .

A única coisa que falta, para justificar a conta acima, é provar que as solução  $v$  existe em todo  $\Omega$ : a existência perto de sua superfície dos dados está garantida pelo teorema de Cauchy-Kowalevski, já que tudo é analítico e os dados também por serem nulos.

Pela observação 1.27 pareceria que isso não possa dar certo, já que o raio de convergência da solução do teorema depende dos parâmetros  $M$  e  $\xi$ , que dependem dos coeficientes e então não poderíamos encontrar uma região que sirva para todo polinômio  $P$ . Em particular (veja as definições antes da equação (1.31)),  $\xi$  depende do raio de convergência dos coeficientes, e então independe do polinômio que obviamente é uma função analítica que converge sempre, mas  $M$  depende dos coeficientes de  $P$  e logo não podemos ter uma estimativa uniforme.

A solução do problema vem da linearidade de  $L$ : de fato, se a solução de  $Lu = f$  converge em uma bola cujo raio é dado por uma certa função  $\rho(M, \xi)$ , onde  $M, \xi$  dependem de  $L$  e  $f$ , então, para todo  $\alpha > 0$  a solução de  $(\alpha L)u = \alpha f$  convergirá em uma bola de raio  $\rho(\alpha M, \xi)$  (pois ao operador  $\alpha L$  e à função  $\alpha f$  corresponderão séries com o mesmo raio de convergência mas coeficientes multiplicados por  $\alpha$ ), mas por linearidade a solução é a mesma função, implicando que a função  $\rho(M, \xi)$  independe de  $M$ .

[Também podemos explicar isso observando que para afirmar que  $\int_{\Omega} u P \, dx dy = 0$  implica  $u \equiv 0$ , não precisamos considerar qualquer polinômio, mas, graças à linearidade, podemos nos limitar aos polinômios re-escalados de maneira que a constante  $M$  seja sempre a mesma].

Com isso é possível encontrar  $\gamma$  de maneira que as soluções dos dois problemas existam em todo  $\Omega$ , justificando a conta acima e provando o lema (podemos repetir a construção pondo  $\gamma$  do outro lado de  $y = 0$ ).

□

### Bibliografia do capítulo

- Seções 1.1...1.3:  
principal: [FL] páginas 30..34 e 42..46;
- Seções 1.4.1...1.4.2:  
principal: [FL] páginas 48..50 ;  
veja também: [JN] páginas 74; [GB] páginas 8..12;
- Seção 1.4.3:  
principal: [FL] páginas 46..54;  
veja também: [JN] páginas 73-77; [GB] páginas 6..16;
- Seção 1.5:  
principal: [JN] páginas 80..; [CH] páginas 237..239+54



# Capítulo 2

## Equações de Primeira Ordem

Neste capítulo consideraremos equações de primeira ordem e procuraremos obter resultados mais completos com respeito aos do capítulo anterior. Em particular, procuraremos condições para garantir existência, unicidade e dependência contínua dos dados da solução de um problema de Cauchy (sem precisar analiticidade dos dados) e procuraremos uma fórmula para expressar a solução.

### 2.1 O método das características

#### 2.1.1 O caso linear e semilinear

A forma mais geral para uma EDP semilinear de primeira ordem em  $\mathbb{R}^n$  é

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) \partial_{x_i} u(x) = F(x, u); \quad (2.1)$$

pondo os coeficientes  $a_i$  num vetor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  podemos escrever (2.1) na forma

$$\mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x) = F(x, u). \quad (2.2)$$

A equação será linear se  $F(x, u)$  é da forma  $f(x) - b(x)u(x)$ , mas veremos que isso influi muito pouco no que faremos, então trabalharemos diretamente no caso semilinear.

Observe-se que definindo  $L_x u = \mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x)$  temos  $\chi_{L,x}(\xi) = \mathbf{a}(x) \cdot \xi$ , isto é, a variedade característica  $char_x(L)$  é o hiperplano normal ao vetor  $\mathbf{a}$ , enquanto a condição de não-caracteristicidade torna-se  $\nu \cdot \mathbf{a} \neq 0$ : o vetor  $\mathbf{a}$  não pode ser tangente à superfície dos dados. De fato, (2.2) fixa  $\mathbf{a}(x) \cdot \nabla u = F$ : se  $\mathbf{a}$  é tangente à superfície então estaria vinculando o dado e deixando indeterminada a derivada em direção normal.

Como a equação (2.2) prescreve como varia  $u$  na direção  $\mathbf{a}$ , podemos dividir o problema em duas partes.

- Primeiro calculamos as linhas integrais do campo vetorial  $\mathbf{a}(x)$ , isto é, as soluções da EDO em  $\mathbb{R}^n$

$$x'_{x_0}(t) = \mathbf{a}(x_{x_0}(t)), \quad x_{x_0}(0) = x_0 : \quad (2.3)$$

para cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  a solução  $x_{x_0}(t)$  é uma curva em  $\mathbb{R}^n$  parametrizada em  $t$ .

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  é um aberto e a função  $\mathbf{a} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  (e logo localmente Lipschitz), sabemos da teoria das EDOs que por todo ponto  $x_0 \in A$  passa uma única solução; além disso,  $\mathbf{a}(x_0)$  será tangente a esta curva em  $x_0$ . Isso implica que se  $x_0$  está em  $S$  hipersuperfície não-característica, então a curva obtida não será tangente a  $S$  e logo  $x_{x_0}(t) \notin S$  para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$  e algum  $\varepsilon > 0$ .

Além disso, a solução depende continuamente dos dados iniciais. Assim, se  $S$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $x_0$  varia em  $S$ , as curvas  $\{x_{x_0}(t) : x_0 \in S, t \in (-\varepsilon(x_0), \varepsilon(x_0))\}$  preenchem uma vizinhança de  $S$  (veremos isso melhor na demonstração do teorema 2.10).

- Fixado  $x_0$  e calculada a curva  $x_{x_0}(t)$ , podemos tentar calcular a solução  $u$  ao longo dela: de fato, se  $u$  for uma solução de classe  $\mathcal{C}^1$  de (2.2), então, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[u(x_{x_0}(t))] &= \nabla u(x_{x_0}(t)) \cdot x'_{x_0}(t) = \nabla u(x_{x_0}(t)) \cdot \mathbf{a}(x_{x_0}(t)) \\ &= F(x_{x_0}(t), u(x_{x_0}(t))) : \end{aligned} \quad (2.4)$$

se  $x_{x_0}(t)$  é conhecida então esta é apenas uma simples EDO e permite calcular  $u$  conhecendo a condição inicial  $u(x_0)$ .

**Definição 2.1.** *As linhas integrais do campo  $\mathbf{a}$  dadas por (2.3) são ditas **projeções características** da equação (2.2): como vimos, ao longo delas a EDP (2.2) se torna a EDO (2.4).*

Essas considerações nos levam ao chamado **método das características**, que consiste em encontrar uma vizinhança de  $S$ , de forma que possamos cobrir esta vizinhança com as curvas  $\{x_{x_0}(t); x_0 \in S\}$  e resolver (2.4) ao longo delas: dessa maneira a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x) = F(x, u). \\ u(x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{em } S \quad (2.5)$$

pode ser procurada resolvendo, para cada  $x_0 \in S$ , o sistema de EDOs, chamado **sistema característico**

$$\begin{cases} x'_{x_0}(t) = \mathbf{a}(x_{x_0}(t)), & x_{x_0}(0) = x_0, \\ v'_{x_0}(t) = F(x_{x_0}(t), v_{x_0}(t)), & v_{x_0}(0) = \varphi(x_0), \end{cases} \quad (2.6)$$

e a potencial solução será dada por  $u(x_{x_0}(t)) = v_{x_0}(t)$ ; se  $S$  for dada em forma paramétrica como  $x = g(s)$  então podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s(t) = \mathbf{a}(x_s(t)), & x_s(0) = g(s), \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = F(x_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(s)), \end{cases} \quad (2.7)$$

e a potencial solução em função dos parâmetros  $(s, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  será  $u(x_s(t)) = v_s(t)$ .

**Observação 2.2.** Observe que até aqui não mostramos que a solução obtida de (2.7) é realmente uma solução de (2.5), mas apenas que dada uma solução de (2.5) de classe  $\mathcal{C}^1$  então a função  $u(x_{x_0}(t))$  satisfaz (2.4), desde que  $x_{x_0}$  satisfaça (2.3). Que vale a recíproca será mostrado no teorema 2.10.  $\triangleleft$

**Observação 2.3.** Destacamos que o sistema (2.7) é “triangular a blocos”, no sentido que a primeira equação (vetorial de dimensão  $n$ ) pode ser resolvida independentemente da segunda, e sua solução pode depois ser substituída na segunda.

*Exemplo 2.4.* a)

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

Neste caso podemos parametrizar a superfície como  $S = \{(s, 0); s \in \mathbb{R}\}$ , o vetor normal é  $\nu = (0, 1)$  e  $\mathbf{a}(x, y) = (1, 1)$ , assim  $\nu \cdot \mathbf{a} = 1$  e o problema é não-característico.

O sistema característico será

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s(t) = 1, & x_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}y_s(t) = 1, & y_s(0) = 0, \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = v_s(t), & v_s(0) = 1. \end{cases}$$

Efetuada os cálculos obteremos

$$\begin{cases} x_s(t) = t + s, \\ y_s(t) = t, \\ v_s(t) = e^t : \end{cases}$$

a candidata a ser solução será  $e^t$  ao longo de cada reta  $(t + s, t)$ ; eliminando os parâmetros obtemos  $(t = y, s = x - y)$ , logo

$$u(x, y) = e^y.$$

Observamos que neste caso as *projeções características* são as retas de equação  $y = x - s$ , ( $s \in \mathbb{R}$ ).

b)

$$\begin{cases} u_x + u_y = u \\ u(x, -x) = 1. \end{cases}$$

Agora podemos parametrizar a superfície como  $S = \{(s, -s); s \in \mathbb{R}\}$ , o vetor normal é  $\nu = (1, 1)/\sqrt{2}$  e ainda o problema é não-característico.

O sistema característico mudará apenas pela condição  $y_s(0) = -s$ , assim obteremos

$$\begin{cases} x_s(t) = t + s, \\ y_s(t) = t - s, \\ v_s(t) = e^t : \end{cases}$$

eliminando os parâmetros obtemos  $(2t = x + y, 2s = x - y)$ , logo

$$u(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}}.$$

As *projeções características* são ainda as mesmas retas (apenas muda a parametrização delas).

- c) Enfim, no caso da condição inicial ser dada por  $u(x, x) = 1$ , teremos um problema característico pois  $\nu = (1, -1)/\sqrt{2}$  é ortogonal a  $\mathbf{a}$ ; de fato não podemos resolver o problema pois se escrevermos o sistema característico obteríamos sempre a mesma reta (a projeção característica  $x = y$ ) com valores de  $v$  contraditórios (a única projeção característica que corta a reta dos dados é a própria reta).

★

### 2.1.2 O caso quasilinear

Consideremos agora o caso quasilinear

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) \partial_{x_i} u(x) = b(x, u); \quad (2.8)$$

pondo de novo os coeficientes  $a_i$  num vetor  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  obtemos

$$\mathbf{a}(x, u(x)) \cdot \nabla u(x) = b(x, u(x)). \quad (2.9)$$

Observe-se que agora a condição de não-caracteristicidade é  $\mathbf{a}(x, u) \cdot \nu \neq 0$ : isso ainda significa que  $\mathbf{a}$  não pode ser tangente à superfície dos dados, mas conforme vimos no capítulo anterior, ela dependerá não apenas da superfície mas também do dado de Cauchy, já que  $\mathbf{a}$  depende de  $u$ .

Podemos dar uma interpretação geométrica da equação construindo o vetor  $\tilde{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e pondo (2.9) na forma

$$\tilde{\mathbf{a}}(x, u) \cdot (\nabla u(x), -1) = 0; \quad (2.10)$$

se considerarmos a superfície em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que representa o gráfico da solução  $u(x)$ , o vetor  $(\nabla u(x), -1)$  será um vetor perpendicular a este gráfico no ponto  $(x, u(x))$  (de fato, o plano  $\pi$  tangente em  $(x_0, u(x_0))$  será  $\nabla u(x_0) \cdot (x - x_0) - (\pi(x) - u(x_0)) = 0$ ), logo a equação pode ser interpretada geometricamente dizendo que o vetor  $\tilde{\mathbf{a}}(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1}$  é tangente ao gráfico. No caso em duas variáveis, mais fácil de visualizar, isso significa encontrar uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  que é sempre tangente ao campo  $\tilde{\mathbf{a}}$ . Um problema de Cauchy para (2.10) significará encontrar a superfície que passa por uma curva dada.

Usando esta interpretação geométrica, podemos esperar obter informações sobre as soluções estudando as linhas integrais do campo vetorial  $\tilde{\mathbf{a}}(x, v)$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ; isso significa resolver o sistema de EDOs

$$\begin{cases} x'_{x_0}(t) = \mathbf{a}(x_{x_0}(t), v_{x_0}(t)), & x_{x_0}(0) = x_0, \\ v'_{x_0}(t) = b(x_{x_0}(t), v_{x_0}(t)), & v_{x_0}(0) = v_0; \end{cases} \quad (2.11)$$

para cada  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  a solução  $(x(t), v(t))$  é uma curva em  $\mathbb{R}^{n+1}$  parametrizada em  $t$ .

#### Definição 2.5.

- As linhas integrais do campo  $\tilde{\mathbf{a}}$ , calculadas em (2.11), são ditas **curvas características** da equação (2.9).
- Suas projeções em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, as curvas  $x_{x_0}(t)$ , são ditas **projeções características**.
- A direção do vetor  $\tilde{\mathbf{a}}$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  é dita **direção característica** (não confunda com o vetor característico definido na definição 1.11).

Como fizemos no caso semilinear, podemos procurar a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x, u) \cdot \nabla u(x) = b(x, u). \\ u(x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{em } S \quad (2.12)$$

resolvendo, para cada  $x_0 \in S$ , o sistema de EDOs (2.11) (chamado ainda **sistema característico**) com  $v_0 = \varphi(x_0)$ ; a potencial solução será dada por  $u(x_{x_0}(t)) = v_{x_0}(t)$ ; se  $S$  for dada em forma paramétrica como  $x = g(s)$  então podemos escrever

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s(t) = \mathbf{a}(x_s(t), v_s(t)), & x_s(0) = g(s), \\ \frac{d}{dt}v_s(t) = b(x_s(t), v_s(t)), & v_s(0) = \varphi(g(s)), \end{cases} \quad (2.13)$$

e a potencial solução em função dos parâmetros  $(s, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  será  $u(x_s(t)) = v_s(t)$ .

Como na observação 2.2, não mostramos ainda (o faremos no teorema 2.10) que resolvendo (2.13) obtemos uma solução de (2.12), apenas podemos verificar o seguinte lema:

**Lema 2.6.** *Dada uma solução de (2.9) de classe  $C^1$  em uma vizinhança  $V_{x_0}$  de  $x_0$ , se  $x(t)$  é solução de*

$$\begin{cases} x'(t) = \mathbf{a}(x(t), u(x(t))), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

e  $v(t) := u(x(t))$ , então  $v$  satisfaz  $v'(t) = b(x(t), v(t))$ , isto é, a curva  $(x(t), v(t))$  satisfaz o sistema característico (2.11) com  $v_0 = u(x_0)$ .

*Demonstração.* Precisamos apenas verificar que

$$\begin{aligned} v'(t) &= \frac{d}{dt}[u(x(t))] = \nabla u(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla u(x(t)) \cdot \mathbf{a}(x(t), u(x(t))) \\ &= b(x(t), u(x(t))) = b(x(t), v(t)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

□

Um corolário imediato do lema acima é o seguinte.

**Corolário 2.7.**

- A curva característica  $(x(t), v(t))$  do lema 2.6 está contida no gráfico de  $u$  pelo menos até sair de  $V_{x_0}$ .
- Se  $u, v$  são duas soluções de (2.9) que coincidem em um ponto  $x_0$ , então elas coincidirão ao longo da inteira curva característica que passa por  $(x_0, u(x_0))$ .
- Se o problema (2.12) é não-característico então sua solução (se existir) deve ser a reunião das curvas características que passam pelos pontos  $(x, \varphi(x)) : x \in S$ .

**Observação 2.8.** Comparando o sistema (2.11) com (2.6) vemos que no caso quasilinear o sistema é totalmente acoplado: a última equação deve ser resolvida junto com as outras  $n$ . Isso significa que as projeções características não podem ser calculadas a priori, mas dependem da solução.

Observe-se também que, no caso quasilinear, as curvas características dependem apenas da equação, enquanto as projeções características dependem da particular solução considerada; no

caso semilinear, pelo fato do sistema (2.6) ser triangular, as projeções características também dependem apenas da equação, pois todas as curvas características que passam por  $(x_0, \tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  têm a mesma projeção. Por isso, no caso semilinear falamos apenas das projeções (e as vezes os conceitos de curva e projeção características são confundidos).

*Exemplo 2.9.* Um exemplo de resolução de uma equação quasilinear já foi visto na página 28, como parte da demonstração do teorema de Cauchy-Kowalevski. ★

### 2.1.3 O teorema de existência e unicidade

Demonstraremos agora o teorema que justifica o método das características apresentado nas seções anteriores: consideraremos o caso quasilinear, mas obviamente vale também para o caso semilinear ou linear. Um teorema análogo pode ser demonstrado também no caso totalmente não linear (veja o teorema 2.17), mas mostraremos a demonstração apenas neste caso mais simples.

**Teorema 2.10.** *Se no problema (2.12)  $S$  é uma superfície de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $a, b, \varphi$  são funções reais de classe  $\mathcal{C}^1$  e a condição de não-caracteristicidade está satisfeita, então existe uma vizinhança  $N(S)$  tal que existe uma única solução  $u \in \mathcal{C}^1(N(S))$  do problema.*

*Além disso, tal solução pode ser calculada resolvendo o sistema característico na forma (2.13) e obtendo  $u$  em função de  $x$  eliminando os parâmetros.*

**Observação 2.11.** Como o teorema, além de afirmar existência e unicidade, providencia uma fórmula de resolução (o sistema característico) e como sabemos que as soluções deste sistema dependem com continuidade dos dados, podemos concluir **dependência contínua dos dados** também para (2.12). ◁

*Demonstração do teorema 2.10.* A unicidade segue do corolário 2.7: dadas duas soluções  $u, v$ , elas coincidem em  $S$ , logo coincidem ao longo de toda curva característica que passa por  $S^* = \{(x, \varphi(x)) : x \in S\}$ . Como veremos a seguir, as projeções características correspondentes preenchem uma (oportunamente pequena) vizinhança de  $S$ , logo  $u$  e  $v$  coincidem nesta vizinhança.

Sem perda de generalidade podemos considerar  $S$  na forma paramétrica  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; x = g(s)\}$ ; de fato, isso sempre pode ser feito localmente, em seguida, pela unicidade, as soluções podem ser coladas.

Para todo  $s$  fixado consideremos o sistema característico

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} x(s, t) = \mathbf{a}(x(s, t), v(s, t)) & x(s, 0) = g(s) \\ \frac{\partial}{\partial t} v(s, t) = b(x(s, t), v(s, t)) & v(s, 0) = \varphi(g(s)). \end{cases} \quad (2.15)$$

Sabemos que existe uma única solução para  $t \in (-\varepsilon(s), \varepsilon(s))$  e como os coeficientes são de classe  $\mathcal{C}^1$  a solução depende de maneira  $\mathcal{C}^1$  de  $(s, t)$ , isto é, o mapa

$$M : (s, t) \mapsto x(s, t)$$

é de classe  $\mathcal{C}^1$ . Usando que  $M(s, 0) = g(s)$  podemos calcular o Jacobiano

$$J_M(s, 0) = \left[ J_g(s) \quad ; \quad \frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) \right],$$

como pela primeira equação em (2.15) e pelas condições iniciais  $\frac{\partial x}{\partial t}(s, 0) = \mathbf{a}(x(s, 0), v(s, 0)) = \mathbf{a}(g(s), \varphi(g(s)))$ , o determinante de  $J_M(s, 0)$  é proporcional ao produto escalar da normal a  $S$  em  $g(s)$  com o vetor  $\mathbf{a}$  no mesmo ponto, logo é diferente de zero pela condição de não-caracteristicidade.

Isso implica que, pelo teorema da função inversa, fixado um ponto  $s_0$  existe uma vizinhança  $V$  de  $(s_0, 0)$  na qual podemos inverter  $M$  obtendo a função de classe  $\mathcal{C}^1$

$$M^{-1} : M(V) \rightarrow V : x \mapsto (s(x), t(x)),$$

onde  $M(V)$  é uma vizinhança de  $x_0 = g(s_0)$ . Isso justifica a afirmação que fizemos que as projeções características preenchem uma vizinhança de  $S$ .

Por ser a inversa de  $M : V \rightarrow M(V)$ , e como  $M(s, 0) = g(s)$ , vale que

$$\text{se } x = g(s) \in S \cap M(V) \text{ então } \begin{cases} t(x) = 0 \\ g(s(x)) = x \end{cases} . \quad (2.16)$$

Agora definamos

$$u(x) := v(s(x), t(x)) = v \circ M^{-1}(x),$$

que logo será de classe  $\mathcal{C}^1$ ; verificaremos que  $u$  é solução de (2.12) em  $M(V)$ .

Por (2.16) e pela condição inicial para  $v$  em (2.15), temos que  $x = g(s) \in S \cap M(V)$  implica  $u(x) = v(s(x), 0) = \varphi(g(s(x))) = \varphi(x)$ , logo a condição de Cauchy está satisfeita.

Calculemos  $\nabla u(x) \cdot \mathbf{a}(x, u(x))$ : isso equivale a

$$J_u(x)\mathbf{a}(x, u(x)) = J_v(M^{-1}(x))J_{M^{-1}}(x)\mathbf{a}(x, v \circ M^{-1}(x)).$$

Observe que  $z = J_{M^{-1}}(x)\mathbf{a}(x, v \circ M^{-1}(x))$  é o único vetor tal que

$$J_{M^{-1}}^{-1}(x)z = J_M(M^{-1}(x))z = \mathbf{a}(x, v \circ M^{-1}(x)) :$$

como a última coluna de  $J_M(M^{-1}(x))$  é  $\frac{\partial}{\partial t}x(M^{-1}(x)) = \mathbf{a}(x(M^{-1}(x)), v(M^{-1}(x)))$ , deduzimos que  $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ i \end{bmatrix}$ . Logo  $J_u(x)\mathbf{a}(x, u(x)) = J_v(M^{-1}(x))z$  é a última coluna do vetor linha  $J_v(M^{-1}(x))$ , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t}v(M^{-1}(x)) = b(x(M^{-1}(x)), v(M^{-1}(x))) = b(x, u(x)).$$

Concluimos que

$$\nabla u(x) \cdot \mathbf{a}(x, u(x)) = b(x, u(x)) \text{ para } x \in M(V),$$

isto é, mostramos que uma solução existe e que pode realmente ser calculada através do sistema característico.  $\square$

**Observação 2.12.** Observemos que a condição de não-caracteristicidade (junto com o fato que os coeficientes e os dados são de classe  $\mathcal{C}^1$ ) foi usada para garantir a invertibilidade do mapa  $M$  que leva os parâmetros  $(s, t)$  no ponto  $x$ : isso significa que as projeções características

definem um novo sistema de coordenadas, em particular, significa que estas projeções não se entrecruzam nem deixam buracos numa vizinhança de  $S$ .

Não podemos garantir porém que o mapa  $M$  seja invertível globalmente, isto é, as projeções características poderiam, a uma certa distância de  $S$ , começar a cruzar, e a solução obtida pelo sistema característico parar de fazer sentido: de fato, se duas características cruzam significa que a solução num ponto deveria assumir, em geral, dois valores diferentes: um calculado ao longo de uma característica e o outro pela outra. Também uma característica poderia voltar a cruzar a superfície depois de se afastar dela.  $\triangleleft$

*Exemplo 2.13.*

$$\begin{cases} x^2 u_x + y^2 u_y = u^2 \\ u(s, 2s) = 1. \end{cases}$$

Note que o problema é não-característico para  $s \neq 0$ , pois o vetor  $\nu = (-2, 1)$  é normal a  $S$  e como  $a(x, y) = (x^2, y^2)$  teremos que se  $(x, y) \in S$

$$a(s, 2s) \cdot \nu = -2s^2 + 4s^2 = 2s^2$$

que só será nulo se  $s = 0$ ; consideraremos então só a semireta com  $s > 0$ .

O sistema de EDO's característico é dado por

$$\begin{cases} x'_s(t) = x_s^2(t), & x_s(0) = s, \\ y'_s(t) = y_s^2(t), & y_s(0) = 2s, \\ v'_s(t) = v_s^2(t), & v_s(0) = 1; \end{cases}$$

resolvendo,

$$\begin{cases} x_s(t) &= \frac{s}{1-st}, \\ y_s(t) &= \frac{2s}{1-2st}, \\ v_s(t) &= \frac{1}{1-t}; \end{cases}$$

eliminando os parâmetros obtemos a solução

$$u(x, y) = \frac{xy}{xy - y + 2x}. \quad (2.17)$$

Observe que a função acima faz sentido em  $\mathbb{R}^2$  menos algumas curvas, mas ela será a solução do problema de Cauchy considerado apenas no conexo que contém a semireta dos dados, e pelo qual passam as projeções características que cortam essa reta.

*Exercício 2.14.* Estudar a solução obtida no exemplo 2.13, para entender qual é o conjunto no qual faz sentido dizer que (2.17) é solução do problema de Cauchy considerado.

Sugestão: observe que as características que cortam a semireta estão inteiramente acima de  $y = x$  e a direita de  $x = 0$ ; além disso, as soluções  $(x, y, v)(t)$  não existem para todo  $t$ !

[Solução (verificar!): o conjunto é  $\{x, y > 0, y/(y+2) < x < y\}$ . ]

Observe então que, conforme afirmado pelo teorema 2.10, a solução existe numa vizinhança de  $S$ . Porém, não pode ser estendida a todo  $\mathbb{R}^2$ , também não pode ser estendida a toda uma componente conexa do domínio de (2.17), nem a toda a região definida pelas características que cruzam  $S$ , pois ao longo de algumas delas  $u \rightarrow \infty$  tendendo a algum ponto. Não tem-se cruzamento de projeções características pois o problema é semilinear, logo estas projeções são solução de um sistema de EDOs desacoplado da equação para a componente  $v$  da solução. ★





*Exemplo 2.15.* a) Considere o problema

$$\begin{cases} uu_x + u_y = 1 \\ u(s, s) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Então  $\mathbf{a} = (u, 1) = (0, 1)$  e o problema é sempre não-característico ( $\nu = (1, -1)$ ). Parametrizando  $S = \{(s, s); s \in \mathbb{R}\}$  o sistema característico resulta

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x_s = v_s, & x_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}y_s = 1, & y_s(0) = s, \\ \frac{d}{dt}v_s = 1, & v_s(0) = 0. \end{cases}$$

Logo obtemos

$$\begin{cases} \Rightarrow x_s(t) = \frac{t^2}{2} + s; \\ y_s(t) = t + s; \\ v_s(t) = t. \end{cases}$$

Eliminando os parâmetros ( $x - y = t^2/2 - t \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1 + 2x - 2y}$ , mas como  $x = y \Rightarrow t = 0$  é apenas  $t = 1 - \sqrt{1 + 2x - 2y}$ ) obtemos nossa solução

$$u(x, y) = 1 - \sqrt{1 + 2x - 2y}. \quad (2.19)$$

Observe que as projeções características (fazer o desenho) são parábolas de equação  $x - s = (y - s)^2/2$ ,  $s \in \mathbb{R}$ : elas não cruzam para valores pequenos do parâmetro  $t$  (perto da reta  $y = x$ ), mas são todas tangentes à reta  $y = x + 1/2$  para o valor do parâmetro  $t = 1$ : a partir deste ponto a solução construída via características para de fazer sentido (vemos em (2.19) que  $u$  não é derivável sobre esta reta e não faz mais sentido acima dela).

b) Se considerarmos a condição  $u(s, s) = 1$  o problema (2.18) tornar-se-ia característico pois  $\mathbf{a} = (u, 1) = (1, 1) \perp \nu$ . De fato, resolvendo o sistema característico, obtêm-se as projeções características  $x - s = (y - s)^2/2 + y - s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , que são todas tangentes à reta  $y = x$  e estão no semiplano  $y \leq x$ , logo não preenchem uma vizinhança da reta, e se cruzam entre elas em qualquer vizinhança (fazer o desenho).

Observe-se que no caso (a) temos ainda existência de uma solução numa oportuna vizinhança de  $S$ , como garantido pelo teorema 2.10, mas a solução pode ser estendida apenas até a reta  $y = x + 1/2$  (exclusive), pois depois de tangenciar esta reta as projeções características voltam atrás e começam a cruzar outras.

Observe-se também que, as projeções características obtidas no caso (a) e no caso (b) não são as mesmas, pois o problema é quasilinear. ★

## 2.1.4 O caso geral (totalmente não linear)

Consideremos a equação mais geral de primeira ordem

$$F(x, u, \nabla u) = 0. \quad (2.20)$$

Se fixarmos  $(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , ponto do gráfico da solução, então (2.20) se torna uma equação escalar na forma  $\widehat{F}(\nabla u) = 0$ , isto é, impõe uma relação entre as  $n$  derivadas parciais. No caso quasilinear esta relação era linear e, como vimos, resultava na condição que o vetor  $\tilde{\mathbf{a}}$  fosse tangente ao gráfico. No caso totalmente não linear, esta relação apenas define um conjunto de possíveis vetores tangentes: chamamos **cone de Monge** o cone das possíveis direções tangentes.

No caso quasilinear, então, a equação definia o campo vetorial  $\tilde{\mathbf{a}}$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e prescrevia que o gráfico da solução fosse tangente a esse campo, enquanto no caso totalmente não linear define um “campo de cones” que representam em cada ponto as possíveis direções tangentes: o gráfico da solução deverá em todo ponto ser tangente a uma das direções no cone correspondente, mas não sabemos qual é de fato o vetor tangente entre os que compõe o cone de Monge, isto é, tem uma incógnita a mais no problema.

Existem métodos de resolução baseados nesta interpretação geométrica (veja por exemplo [JN, EV]).

O que pretendemos fazer aqui é generalizar o método das características ao caso de equação totalmente não linear. Isso nos dará uma maneira de calcular a solução através de um sistema de EDOs (agora de dimensão  $2n + 1$ ). É também possível estender o teorema 2.10 para este caso: enunciaremos o resultado no teorema 2.17 sem demonstração (mas a demonstração segue as mesmas idéias).

### Sistema de EDO's Característico

Dado o problema de Cauchy para a equação (2.20), isto é

$$\begin{cases} F(x, u, \nabla u) = 0, \\ u(x) = \varphi(x) \end{cases} \quad \text{em } S \quad (2.21)$$

com  $F, S, \varphi$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , seja  $u$  uma solução de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Consideremos uma curva em  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dada por  $(x(t), v(t), p(t))$ , onde

$$v(t) = u(x(t)) \quad e \quad p(t) = (\nabla u^t)(x(t)).$$

Derivando a definição de  $p$  obtemos

$$p'(t) = [J_{\nabla u}(x(t))]x'(t); \quad (2.22)$$

observe que  $J_{\nabla u}$  é a matriz Hessiana de  $u$ , que será simétrica (lembre que assumimos  $u$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ). Observe porém que não é natural que apareçam as derivadas segundas na resolução de uma equação de primeira ordem: tentaremos eliminá-las; para fazer isso derivemos com respeito às variáveis  $x$  a identidade  $F(x, u(x), \nabla u(x)) = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x [F(x, u(x), \nabla u(x))] = \\ &= F_x(x, u(x), \nabla u(x)) + F_v(x, u(x), \nabla u(x))\nabla u(x) + F_p(x, u(x), \nabla u(x))J_{\nabla u}(x) \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde denotamos por  $F_x = (\nabla_x F)$ ,  $F_p = (\nabla_p F)$  os vetores (linha) com as  $n$  derivadas parciais de  $F(x, v, p)$  com respeito às variáveis  $x$  e  $p$ , respectivamente, e  $F_v = \frac{\partial F}{\partial v}$ .

Para eliminar  $J_{\nabla u}$  de (2.22) ponhamos

$$x'(t) = F_p(x(t), v(t), p(t))^t, \quad (2.24)$$

assim, usando a simetria de  $J_{\nabla u}$  e (2.23),

$$\begin{aligned} p'(t) &= [J_{\nabla u}(x(t))]x'(t) = [J_{\nabla u}(x(t))][F_p(x(t), v(t), p(t))]^t = \\ &= ([F_p(x(t), v(t), p(t))][J_{\nabla u}(x(t))])^t = \\ &= -F_x(x(t), v(t), p(t))^t - F_v(x(t), v(t), p(t))\nabla u(x(t))^t. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Enfim, a equação para  $v$  será

$$v'(t) = \nabla u(x(t)) \cdot x'(t) = \nabla u(x(t))[F_p(x(t), v(t), p(t))]^t = F_p(x(t), v(t), p(t)) \cdot p(t).$$

Com isso obtivemos as  $2n + 1$  equações do **sistema característico**:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = F_p^t(x(t), v(t), p(t)), \\ \frac{d}{dt}v(t) = F_p(x(t), v(t), p(t)) \cdot p(t), \\ \frac{d}{dt}p(t) = -F_x^t(x(t), v(t), p(t)) - F_v(x(t), v(t), p(t)) \cdot p(t). \end{cases} \quad (2.26)$$

**Observação 2.16.** O que mostramos até aqui é que se  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^2$  e  $x(t)$  satisfaz a primeira equação em (2.26) com  $v(t) = u(x(t))$  e  $p(t) = \nabla u(x(t))$ , então  $p$  e  $v$  satisfazem as outras duas equações.

A chave para obter isso foi a escolha (2.24) que permitiu usar (2.23) para eliminar o termo contendo as derivadas segundas.

Para mostrar que de fato a solução calculada pelo sistema (2.26) gera uma solução de (2.20) precisamos do análogo do teorema 2.10: veja o teorema 2.17 abaixo.

Observe que se a equação é quasilinear na forma (2.9), então  $F_p(x, v, p) = \mathbf{a}(x, v)$ , assim  $F_p(x, v, p) \cdot p = \mathbf{a}(x, v) \cdot p = b(x, v)$  e logo a terceira equação torna-se inútil pois  $p$  desaparece das primeiras duas.  $\triangleleft$

Analogamente aos casos anteriores, chamaremos **projeções características** as curvas  $x(t)$  (em  $\mathbb{R}^n$ ) e **curvas características** as curvas  $(x(t), v(t))$  (em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), mas agora ambas dependem da solução considerada.

Serão as curvas  $(x(t), v(t), p(t))$  (em  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ) que apenas dependem da equação, e são as vezes chamadas de “**characteristics stripes**” ([JN]).

O **cone de Monge** num certo ponto  $(x_0, v_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  fixado será composto pelos vetores  $(F_p, F_p \cdot p) \in \mathbb{R}^{n+1}$  calculados em  $x_0, v_0$  e com  $p \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo  $F(x_0, v_0, p) = 0$ , que dão as possíveis direções da tangente à curva característica; a **direção característica** é dada pelo vetor, entre eles, que realmente é tangente ao gráfico, que então depende da incógnita  $p$  (determinada pela última equação) e não apenas do ponto.

É chamada **solução conoidal** da equação (2.20) no ponto  $(x_0, v_0)$ , a reunião de todas as possíveis curvas características que passam por  $(x_0, v_0)$ , isto é, as curvas  $(x, v)(t)$  obtidas do sistema característico (2.26) quando as condições iniciais para  $x$  e  $v$  são  $x_0$  e  $v_0$ , enquanto as para  $p$  são feitas variar entre todas as possíveis soluções de  $F(x_0, v_0, p) = 0$ .

No caso que  $F$  independa de  $x$  e  $v$ , a solução conoidal e cone de Monge coincidem.

Para poder resolver o sistema característico (2.26) ainda precisamos pôr as condições iniciais certas: fixado  $x_0 \in S$ , as condições para  $x$  e  $v$  serão obviamente  $x(0) = x_0$  e  $v(0) = \varphi(x_0)$ : falta encontrar as condições para  $p$ : como  $p$  deve ser o gradiente de  $u$ , as componentes tangentes a  $S$  são calculadas diretamente derivando o dado de Cauchy. A componente ortogonal será como sempre calculada da equação, uma vez que o problema é não-característico (lembre do capítulo 1 que a condição de não-caracteristicidade implica exatamente que é possível calcular esta componente ao longo de  $S$ ).

Para simplificar a exposição suporemos inicialmente  $S = \{x_n = 0\}$ , assim o vetor  $p_0$  será  $(\nabla\varphi(s_0), p_n(s_0))$  onde  $p_n$  é determinado pela equação  $F(x_0, \varphi(s_0), \nabla\varphi(s_0), p_n(s_0)) = 0$  com  $x_0 = (s_0, 0)$ . Se também vale  $\frac{\partial F}{\partial p_n}(x_0, v_0, p_0) \neq 0$ , sendo  $(x_0, v_0, p_0) = (s_0, 0, \varphi(s_0), \nabla\varphi(s_0), p_n(s_0))$ , então o teorema da função implícita garante que numa vizinhança de  $(x_0, v_0, p_0)$  podemos calcular de maneira única a componente  $p_n(s)$ , em função de  $\varphi(s)$  e  $\nabla\varphi(s)$  (condição de não-caracteristicidade).

Voltando ao problema com  $S$  qualquer, isto significa que podemos calcular univocamente uma condição inicial  $p = \psi(s)$  compatível com o dado  $\varphi$  e com a equação, em toda uma vizinhança em  $S$  de  $x_0$ , logo podemos escrever o sistema que corresponde ao (2.15) do caso quasilinear:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}x(s, t) = F_p^t(x(s, t), v(s, t), p(s, t)), & x(s, 0) = g(s), \\ \frac{\partial}{\partial t}v(s, t) = F_p(x(s, t), v(s, t), p(s, t)) \cdot p(s, t), & v(s, 0) = \varphi(g(s)), \\ \frac{\partial}{\partial t}p(s, t) = -F_v(x(s, t), v(s, t), p(s, t))p(s, t) - F_x^t(x(s, t), v(s, t), p(s, t)), & p(s, 0) = \psi(s). \end{cases} \quad (2.27)$$

De maneira parecida ao feito no teorema 2.10, pode-se mostrar que a condição de não-caracteristicidade garante que os parâmetros  $s, t$  fornecem uma mudança de variável em uma vizinhança de  $S$  de maneira que é possível eliminá-los obtendo a solução nesta vizinhança: a formulação do teorema é a seguinte (veja teorema 2 pag 107 [EV]):

**Teorema 2.17.** *Se no problema (2.21)  $S$  é uma superfície de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $F, \varphi$  são funções reais de classe  $\mathcal{C}^2$ , e a condição de não-caracteristicidade está satisfeita em  $x_0$ , então existe uma vizinhança  $N(x_0)$  tal que existe uma solução  $u \in \mathcal{C}^2(N(x_0))$  do problema.*

*Além disso, tal solução pode ser calculada obtendo a condição inicial apropriada para o sistema característico (2.27), resolvendo-o e obtendo  $u$  em função de  $x$  eliminando os parâmetros.*

**Observação 2.18.** Observe que, no caso  $S = \{x_n = 0\}$ , a condição de não-caracteristicidade afirma  $\frac{\partial F}{\partial p_n}(x_0, v_0, p_0) \neq 0$ ; no caso geral isso torna-se  $F_p(x_0, v_0, p_0)\nu \neq 0$ : como por (2.27)  $F_p(x_0, v_0, p_0)$  é a direção da projeção característica em  $x_0$ , o significado geométrico é análogo ao do caso quasilinear.  $\triangleleft$

**Observação 2.19.** O teorema afirma existência mas não unicidade: de fato, em alguns casos (veja o exemplo 2.20) a equação, por ser não linear, admite mais de uma solução para a componente normal  $d(x_0)$  da derivada em um ponto  $x_0 \in S$ , isto é, mais de uma escolha é possível para a condição inicial  $p_0$ : o vetor  $p_0$  é dito **admissível** quando é compatível com os dados em  $x_0$  e satisfaz  $F(x_0, v_0, p_0) = 0$ .

Se porém  $p_0$  for fixado de maneira admissível e a condição  $F_p(x_0, v_0, p_0)\nu \neq 0$  estiver satisfeita, então será agora possível determinar *univocamente* a função contínua  $\psi(s)$  com  $\psi(s_0) = p_0$  e que seja compatível com o dado  $\varphi$  e com a equação, em toda uma vizinhança em  $S$  de  $x_0 = g(s_0)$ .  $\triangleleft$

**Exemplo 2.20. Equação Da Ótica Geométrica Em 2 Variáveis.** Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} c^2 |\nabla u|^2 = 1 \\ u(\gamma(s)) = u(\gamma_1(s), \gamma_2(s)) = 0. \end{cases}$$

Esta equação descreve o movimento de uma frente de onda como a luz (veja também no exemplo 4.18 da página 67), onde as frentes são as curvas de nível da solução, logo o problema acima tem o significado físico de estudar a propagação de uma frente que num certo instante coincide com a curva  $\gamma$ , que suporemos de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Pondo por simplicidade  $c = 1$  e denotando as variáveis por  $x, y, v = u, p = u_x, q = u_y$ , a equação torna-se equivalente a  $(p^2 + q^2 - 1)/2 = 0$  (a divisão por 2 é apenas para simplificar as contas a seguir).

Assim  $x, y, v$  não aparecem na equação e  $F_{(p,q)}(x, y, v, p, q) = (p, q)$ , logo o sistema característico é

$$\begin{cases} x'_s(t) = p_s(t), & x_s(0) = \gamma_1(s), \\ y'_s(t) = q_s(t), & y_s(0) = \gamma_2(s), \\ v'_s(t) = p_s^2(t) + q_s^2(t) = 1, & v_s(0) = 0, \\ p'_s(t) = 0, & p_s(0) = \pi(s), \\ q'_s(t) = 0, & q_s(0) = \tau(s), \end{cases} \quad (2.28)$$

onde foi usada a equação para simplificar a equação para  $v$  e ainda precisamos determinar as condições iniciais  $\pi, \tau$  para  $p, q$ .

A derivada de  $u$  tangencial a  $\gamma$  é nula (por ser curva de nível), logo o vetor  $(\pi, \tau)$  deve ser ortogonal a  $\gamma$ , isto é,  $\pi\gamma'_1 + \tau\gamma'_2 = 0$ . Para que a equação esteja satisfeita temos  $\pi^2 + \tau^2 = 1$ . Resolvendo o sistema obtemos  $(\pi, \tau) = \pm(\gamma'_2, -\gamma'_1)/\sqrt{(\gamma'_2)^2 + (\gamma'_1)^2}$ .

Observe que temos que escolher um sinal para  $(\pi, \tau)$ , isto é, sempre teremos a possibilidade de duas soluções. Uma vez feita esta escolha porém, a condição de não-caracteristicidade vale sempre para este tipo de problema, já que a derivada normal a  $\gamma$  é sempre bem determinada pela equação, a menos do sinal. (outra maneira de ver isso é pelo sistema (2.28): as projeções características  $(x(t), y(t))$  saem de  $\gamma$  com direção  $(p(0), q(0))$ , que como vimos é logo a direção ortogonal a  $\gamma$ ).

Podemos agora resolver o sistema característico:

$$\begin{cases} \Rightarrow x_s(t) = \gamma_1(s) + \pi(s)t, \\ \Rightarrow y_s(t) = \gamma_2(s) + \tau(s)t, \\ v_s(t) = t \\ p_s(t) = \pi(s), \\ q_s(t) = \tau(s), \end{cases} \quad (2.29)$$

O resultado mostra que a frente propaga em direção perpendicular à frente inicial com velocidade constante igual a 1 (seria igual a  $c$  no caso  $c \neq 1$ ); o sentido depende da escolha feita entre as duas possíveis soluções. Os "raios de luz" são as projeções características  $(x(t), y(t))$ , que são sempre retas perpendiculares a  $\gamma$  e a todas as curvas de nível da solução.

*Observação 2.21.* O teorema 2.17 nos garante (se  $\gamma$  é suficientemente regular) a existência de uma solução perto de  $\gamma$ .

Se  $\gamma$  é uma reta é fácil ver que a solução pode ser prolongada ao plano inteiro ( $p$  e  $q$  não dependem nem de  $t$  nem de  $s$ , logo o gráfico é um plano).

Em qualquer outro caso a solução não poderá existir em todo  $\mathbb{R}^2$ , de fato onde  $\gamma$  é curva, as projeções características que saem do lado côncavo deverão necessariamente cruzar a uma certa distância de  $\gamma$ , e a solução dada por (2.29) não terá mais sentido.  $\triangleleft$

Para esta equação, o *cone de Monge* num ponto  $(x_0, y_0, v_0)$  será o cone em  $\mathbb{R}^3$  contendo as direções da forma  $(p, q, 1)$  com  $p^2 + q^2 = 1$ , isto é, o cone de equação  $(v - v_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  (como a equação independe de  $x, y, v$  todos os cones de monge são idênticos); de fato, o que a equação afirma é que o plano tangente à solução deve ser a 45 graus com o plano  $xy$ .

Desenhando os cones de monge com vértices na curva  $(\gamma, 0)$ , existirão apenas duas superfícies que são tangentes a todos eles, correspondentes às duas soluções. ★

## 2.1.5 Comentários sobre o método das características

**Observação 2.22.** • Com respeito ao teorema de Cauchy-Kowalevski, que nos fornece existência e unicidade quando tudo é analítico, os teoremas 2.10 e 2.17 precisam de uma regularidade bem menor ( $\mathcal{C}^1$  ou  $\mathcal{C}^2$ ) e fornecem muita mais informação sobre a solução: em particular uma fórmula quase explícita (é suficiente saber integrar um sistema de EDOs, o que inclusive pode ser feito numericamente de maneira aproximada) e dependência contínua dos dados.

- O resultado do teorema é apenas local: fornece solução perto de  $S$  mas não diz até onde a sol pode ser estendida; vimos de fato vários exemplos nos quais a uma certa distância de  $S$  as projeções características começavam a cruzar-se, implicando que o mapa  $(s, t) \mapsto x$  não é mais injetora. Além desta possibilidade pode acontecer, como nas EDOs, que a solução divirja a infinito a uma certa distância de  $S$ , como no exemplo 2.13.
- Mais uma vez os teoremas 2.10 e 2.17 mostram que, sob oportunas hipóteses, para ter existência e unicidade precisa por uma condição na forma de uma (isto é,  $k = 1$ ) função de  $n - 1$  variáveis.
- O sistema característico também mostra claramente como os dados influenciam a solução: uma vez calculada a solução podemos desenhar as projeções características: o valor de  $\varphi$  num ponto  $x_0 \in S$  afeta apenas os pontos ao longo da projeção que passa por  $x_0$ ; reciprocamente, o valor de  $u$  num ponto  $x$  depende apenas de  $\varphi$  calculado no ponto  $x_0$  de  $S$  que está na mesma projeção característica de  $x$ .

Podemos então definir:

- Dada uma porção  $\Sigma \subseteq S$ , chamaremos **região de influência** de  $\Sigma$  a região em  $\Omega$  na qual a solução depende dos dados em  $\Sigma$ .
- Dada uma porção  $\Theta \subseteq \Omega$ , chamaremos **domínio de dependência** de  $\Theta$  a porção de  $S$  da qual depende a solução em  $\Theta$ .

Logo para as equações de primeira ordem, a região de influência de  $\Sigma$  será a reunião de todas as projeções características que passam por  $\Sigma$ , enquanto a o domínio de dependência de  $\Theta$  será a porção de  $\Sigma$  cruzada pelas projeções características que passam por  $\Theta$ .

Observe que ambas as noções dependem apenas da equação só no caso semilinear (quando as projeções características podem ser calculadas a priori): no caso geral elas dependerão também da solução considerada, podendo ser diferentes em correspondência de outra solução.

## 2.2 O exemplo de Lewy

O teorema 2.10 foi provado para uma equação (não sistema!) a valores reais. De fato, mesmo para o problema linear, o inteiro método das características construído neste capítulo não faz sentido se o vetor  $\mathbf{a}$  é a valores complexos ou se tem diferentes vetores  $\mathbf{a}$  (um para cada equação de um sistema): não podemos encontrar as projeções características .

Se considerarmos a equação linear

$$\mathbf{a}(x) \cdot \nabla u(x) = b(x)u(x) + f(x). \quad (2.30)$$

supondo  $\mathbf{a}, b, f, u$  funções de variáveis reais mas a valores complexos, então as coisas complicam.

Se apenas  $f$  é complexa a equação desacopla em duas equações reais, que permitem determinar  $Re(u)$  e  $Im(u)$  graças ao teorema 2.10:

$$\begin{cases} \mathbf{a}(x) \cdot \nabla Reu(x) = b(x)Reu(x) + Ref(x), \\ \mathbf{a}(x) \cdot \nabla Imu(x) = b(x)Imu(x) + Imf(x). \end{cases} \quad (2.31)$$

Se  $\mathbf{a}$  e  $b$  também são complexos, o sistema obtido será acoplado, e não podemos invocar o teorema 2.10 para garantir existência de soluções, apenas podemos usar o teorema de Cauchy-Kowalevski se tudo for analítico. Restaria então a duvida no caso complexo com regularidade menor que analítica.

Por um certo tempo se acreditou que devesse valer um resultado de existência e unicidade, apenas faltava a demonstração por dificuldade técnicas, até que foi produzido o exemplo de Lewy, que provou o contrário.

De fato, no caso complexo mas não analítico é possível construir um exemplo que não admite solução (veja os detalhes em [FL], pag 56).

O exemplo é o seguinte: seja

$$Lu = u_x + iu_y - 2i(x + iy)u_t, \quad \text{onde } u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C} : (x, y, t) \mapsto u(x, y, t) :$$

vale a seguinte

**Proposição 2.23.** *Se existe uma solução  $\mathcal{C}^1$  de  $Lu = f(t)$  perto da origem, com  $f$  contínua e real, então  $f$  é analítica.*

Por consequência, não pode existir solução  $\mathcal{C}^1$  se  $f$  for contínua e real mas não analítica (para qualquer dato de Cauchy), mostrando que o teorema 2.10 não pode valer no caso complexo, nem sequer quando o operador é linear.

O exemplo mostra também que, em alguns casos, a hipótese de analiticidade do teorema de Cauchy-Kowalevski é realmente necessária, e não apenas uma hipótese técnica para conseguir fazer a demonstração.

Veremos também na observação 7.14 que, no caso do operador Laplaciano, a analiticidade dos dados pode ser necessária para a existência de uma solução, pois as soluções de  $\Delta u = 0$  são sempre analíticas.

### **Bibliografia do capítulo**

- Seções 2.1.1 e 2.1.2:  
principal: [FL] páginas 34..39;  
veja também: [JN] páginas 9..18; [GB] páginas 18..22;
- Seção 2.1.3:  
principal: [FL] páginas 37,38; [EV] páginas 105..109;
- Seção 2.1.4:  
principal: [EV] páginas 97..105;  
veja também: [GB] páginas 24...; [JN] páginas 19...;
- Seção 2.2:  
principal: [FL] páginas 36,56..58;
- veja também: [EV] páginas 97..115;



# Capítulo 3

## Transporte e conservação

### 3.1 Equações de transporte

Considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (3.1)$$

ele pode ser resolvido pelo método das características e tem solução (para todo  $t > 0$ )  $u(x, t) = f(x - ct)$ ; esta solução pode ser interpretada fisicamente dizendo que a quantidade  $u$  é transportada com velocidade uniforme  $c$ , de fato, a solução é apenas a condição inicial que translada com velocidade  $c$ .

O problema (3.1) poderia modelar o problema físico onde a água em um rio ou num cano viaja com velocidade uniforme  $c$  e a incógnita  $u$  representa a temperatura da água ou a concentração de um poluente: este é simplesmente transportado pela correnteza: no plano  $xt$  viaja ao longo das projeções características de equação  $x_s = s + ct$ .

Se tiver um termo  $g(x, t, u)$ , isto é,

$$\begin{cases} u_t + cu_x = g(x, t, u) \\ u(x, 0) = f(x), \end{cases} \quad (3.2)$$

o efeito é que agora a solução  $u$  muda ao longo das projeções características, as quais continuam as mesmas do problema (3.1). Isto modela um transporte com reação: por exemplo se no rio acontece uma reação química que aumenta a temperatura ou a concentração de poluente.

Se a velocidade não é mais constante o problema torna-se mais complicado:

$$\begin{cases} u_t + c(x, t)u_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (3.3)$$

neste caso precisamos calcular as projeções características, que serão curvas em  $\mathbb{R}^2$  em vez de simples retas paralelas, mas ainda a solução será constante ao longo delas, logo a condição inicial  $f$  é transportada e contemporaneamente deformada.

Este problema ainda pode modelar o transporte da temperatura, mas agora a velocidade da água do rio varia com  $x$  e  $t$ .

Uma formulação diferente é a seguinte

$$\begin{cases} u_t + (c(x, t)u)_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (3.4)$$

neste caso, se o coeficiente é regular, a equação pode ser escrita como  $u_t + c(x, t)u_x = -c_x(x, t)u$ , logo teremos as mesmas projeções características do problema (3.3), mas  $u$  não é mais constante ao longo delas. Este é um modelo para o transporte da concentração do poluente (veremos por que na seção 3.2.1), de fato, onde as projeções características se afastam ( $c_x > 0$ ) a concentração diminui pois o poluente se alonga sobre um comprimento maior.

Se considerarmos mais de uma variável espacial o equivalente da equação em (3.4) seria  $u_t + \operatorname{div}_x(c(x, t)u) = 0$  onde  $u$  depende de  $t$  e de  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c(x, t)$  é um vetor e  $\operatorname{div}_x$  age apenas sobre as variáveis  $x$ . Como anteriormente, se tudo for regular, podemos separar  $\operatorname{div}_x(c(x, t)u) = c(x, t) \cdot \nabla_x u + [\operatorname{div}_x c(x, t)]u$ .

**Observação 3.1.** Os exemplos considerados até aqui são lineares (ou semilineares), logo não aparece cruzamento de proj. características; também as proj. características não podem cruzar mais de uma vez a reta  $t = 0$  pois podem ser parametrizadas pelo próprio  $t$ ; enfim, se supomos  $c(x, t)$  limitado, a componente  $x$  não pode ir ao infinito em tempos finitos (existência global da EDO). Concluimos que a solução existe em todo  $\mathbb{R}^2$ .

Além disso,  $u$  é constante ou evolui ao longo de cada característica independentemente: faria sentido, tanto do ponto de vista do sistema característico quanto do ponto de vista da interpretação física, considerar dados  $f$  irregulares (até descontínuos) obtendo uma solução via sistema característico onde a descontinuidade é transportada ao longo da proj. característica; por exemplo, se tiver uma descontinuidade na concentração de poluente, esta será simplesmente levada inalterada pelo rio. Por outro lado, se  $f$  for regular, então a solução será igualmente regular em todo  $\mathbb{R}^2$ .  $\triangleleft$

Consideremos agora o problema quasilinear:

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x); \end{cases} \quad (3.5)$$

resolvendo via características obtemos

$$\begin{cases} t_s(\tau) &= \tau, \\ x_s(\tau) &= s + c(f(s))\tau, \\ v_s(\tau) &= f(s); \end{cases}$$

ainda  $u$  é constante ao longo das características, que então são retas, mas a inclinação depende da solução  $u$ . Eliminando os parâmetros obtemos a solução em forma implícita:

$$u = f(x - c(u)t), \quad (3.6)$$

que diz que para encontrar  $u(x, t)$  precisamos percorrer a proj. característica até encontrar o valor de  $f$  onde ela cruza o eixo  $t = 0$ , só que agora a inclinação desta proj. característica depende deste mesmo valor.

Se consideramos por exemplo  $f(x) = \sin(x)$  temos garantia (teorema 2.10) de existência de uma solução  $\mathcal{C}^1$  perto da reta  $t = 0$ , mas desenhando as proj. características vemos que para um certo tempo  $t$  elas cruzam: não poderá existir uma solução regular para todo  $t$ .

Na verdade, supondo  $c(u)$  estritamente monótona, uma solução regular em todo  $\mathbb{R}^2$  só poderá ser constante, pois se duas projeções características têm inclinação diferente deverão necessariamente cruzar-se.

Derivando (3.6) com respeito a  $x$  obtemos  $u_x = f'(x - c(u)t)[1 - c'(u)u_x t]$ , da qual obtemos

$$u_x = \frac{f'(x - c(u)t)}{1 + tc'(u)f'(x - c(u)t)} :$$

considerando (pelo significado físico do problema) apenas  $t > 0$ , temos que para  $t$  pequeno o denominador é positivo e a solução pode ser regular, mas sempre que  $c'(u)f' < 0$  teremos que para um certo  $t > 0$  o denominador anula e  $u_x$  tende a infinito: a solução regular não existe mais: é quando as características cruzam.

O tempo máximo de existência de solução regular é dado por

$$t^* = -\frac{1}{\min_{s: c'(f(s))f'(s) < 0} (c'(f(s))f'(s))}$$

(quando o mínimo é negativo).

No caso  $c(u) = u$  obtemos a chamada **equação de Burger**

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = f(x) : \end{cases} \quad (3.7)$$

neste caso a inclinação das características é a própria  $u$ , (3.6) torna-se  $u = f(x - ut)$  e a regularidade será perdida (a menos que  $f' \geq 0$ ) quando  $t^* = -\frac{1}{\min_{s: f'(s) < 0} (f'(s))} > 0$ .

## 3.2 Equações de conservação

Uma equação de conservação em uma dimensão espacial é uma equação na forma (dita forma de divergência)

$$u_t + (F(u))_x = 0. \quad (3.8)$$

Se  $F$  é regular a equação pode ser escrita na forma  $u_t + F'(u)u_x = 0$ , isto é, na mesma forma da equação do problema (3.5).

Como vimos, em geral não existem soluções de (3.5) que sejam regulares para todo  $t > 0$ , por outro lado, para o tipo de problemas físicos que estas equações modelam faria sentido considerar soluções menos regulares, até descontínuas. Por isso queremos procurar uma noção mais geral de solução, que possa apresentar irregularidades.

A técnica para fazer isso é a seguinte:

- assumimos  $u$  regular para fazer sentido a EDP,
- reformulamos o problema de uma forma onde não apareçam mais as derivadas e que seja equivalente à EDP original no caso de soluções regulares,
- assumimos esta nova formulação para definir **soluções em sentido generalizado**.

### 3.2.1 Soluções integrais

Se  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e é solução de (3.8), fixados  $t > 0$  e  $a < b$  integramos em  $[a, b]$  a equação obtendo

$$\int_a^b [u_t + F(u)_x] dx = \frac{d}{dt} \left( \int_a^b u(\xi, t) d\xi \right) + F(u(b, t)) - F(u(a, t)) = 0, \quad \text{para todos } t > 0 \text{ e } a < b. \quad (3.9)$$

Observe que se  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e satisfaz (3.9), então satisfaz (3.8) (é suficiente fazer a conta inversa e observar que se  $f$  é uma função contínua então  $\int_a^b f(x) dx = 0$  para todo  $a < b$  implica  $f \equiv 0$ ): logo as duas formulações são equivalentes para funções de classe  $\mathcal{C}^1$ . Por outro lado, (3.9) faz sentido para  $u$  apenas integrável.

Chamaremos (3.9) de **formulação integral** da EDP (3.8), e definimos então **solução integral** de (3.8) uma função  $u$  integrável que satisfaça (3.9).

A formulação (3.9) também nos mostra melhor o significado físico da EDP (3.8): se  $u$  representa a densidade linear de alguma substância, então  $\int_a^b u(\xi, t) d\xi$  é a quantidade total que está no segmento  $[a, b]$ : sua derivada temporal mais o fluxo de substância que entra no segmento menos o que sai deve sempre dar zero:  $F$  representa então o fluxo da substância na direção positiva do eixo  $x$  (logo em  $b$  está saindo e em  $a$  está entrando) enquanto a equação representa a **lei de conservação** desta substância.

Voltando ao exemplo da seção 3.1, num rio com velocidade  $c$  o fluxo de poluente  $u$  será  $cu$ , logo  $F(u) = cu$  e obtemos a equação (3.1); se por algum motivo a velocidade de transporte depende da própria incógnita  $u$ , então  $F(u) = c(u)u$  e obtemos um problema quasilinear como (3.5).

*Exemplo 3.2.* Considere um canal de largura  $A$  constante e seja  $h(x, t)$  a altura da água no ponto de abscissa  $x$ : logo a quantidade de água entre duas abscissas  $a < b$  é  $A \int_a^b h dx$ , e sua variação será devida (sem chuva!) apenas à diferença entre a água que entra em  $a$ :  $Ah(a)v(a)$ , e a que sai em  $b$ :  $Ah(b)v(b)$ . Neste problema é razoável que a velocidade no canal seja proporcional à altura da água: se por exemplo pomos  $v = h/2$ , então o fluxo será  $F(h) = Ah^2/2$  e obtemos a **equação de Burger**  $h_t + (h^2/2)_x = h_t + hh_x = 0$ . ★

*Exemplo 3.3.* Outro exemplo muito importante no qual aparecem equações de conservação é a gasdinâmica: neste caso porém se trata de um sistema de três equações em três incógnitas que podem ser a densidade do gás  $\rho$ , a velocidade  $v$  e a energia total  $e$ :

— a massa é uma quantidade que se conserva, logo temos  $\rho_t + (v\rho)_x = 0$ ;

— o momento linear não é uma quantidade que se conserva, mas muda em função das forças aplicadas: logo temos  $(\rho v)_t + (\rho v v)_x = f(\rho, e)$  onde  $f$  representa o gradiente da pressão, que pode ser escrito em termos de  $\rho$  e  $e$ ;

— a energia muda em função do trabalho das forças aplicadas, logo  $e_t + (ve)_x = g(\rho, e, v)$  onde  $g$  representa o trabalho das forças de pressão.

Observe que se na equação do momento desconsideramos o termo de pressão  $f(\rho, e)$ , podemos usar a regra do produto e a equação da massa obtendo  $v[(\rho)_t + (\rho v)_x] + \rho[v_t + vv_x] = \rho[v_t + vv_x] = 0$ , logo  $v_t + vv_x = 0$  que é a equação de Burger: neste sentido ela é um modelo simples mas que permite ver alguns dos fenômenos mais complexos que aparecem no problema da gasdinâmica.

Em gasdinâmica existe o fenômeno da formação de **ondas de choque**, isto é, mesmo com condições iniciais regulares, pode acontecer depois de um certo tempo que o escoamento apresente uma ou mais descontinuidades (choques) nas variáveis  $\rho, v, e$ . Por este motivo é importante aprender a tratar problemas de conservação com soluções irregulares. ★

*Exercício 3.4.* Verifique que  $u(x, t) = |x - t|$  satisfaz a formulação integral (3.9) do problema

$$\begin{cases} u_x + u_y = 0, \\ u(x, 0) = |x|, \end{cases}$$

mesmo que não seja  $C^1$ . Verifique que, por outro lado,  $u(x, t) = |x - 2t|$  não a satisfaz. ★

### 3.2.2 Problema de Riemann e soluções com choque

Como estamos interessados em soluções generalizadas que podem ter descontinuidades, estudemos o chamado **Problema de Riemann**, onde a condição inicial é descontínua:

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_l & \text{se } x < 0 \\ u_r & \text{se } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (3.10)$$

**Definição 3.5.** Fixemos primeiro a seguinte notação: suponhamos que uma superfície  $\gamma$  divida o conjunto  $\Omega$  em duas regiões  $\Omega_l$  e  $\Omega_r$  e que seja dada uma função  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que seja contínua tanto em  $\Omega_l$  como em  $\Omega_r$  e tal que suas restrições  $z_l = z|_{\Omega_l}$  e  $z_r = z|_{\Omega_r}$  sejam estendíveis por continuidade até  $\overline{\Omega_l}$  e  $\overline{\Omega_r}$ , respectivamente (admitiremos então  $z_l, z_r$  definidas em  $\overline{\Omega_l}$  e  $\overline{\Omega_r}$ , respectivamente).

Dado  $p \in \gamma$ , denotamos por  $\llbracket z \rrbracket(p)$  o **salto de  $z$  no ponto  $p$** , isto é

$$\llbracket z \rrbracket(p) = z_r(p) - z_l(p).$$

Busquemos então, se existir, uma solução integral de (3.10) na forma de duas soluções constantes dos dois lados de uma curva de equação  $x = \xi(t)$ : se  $a < \xi(t) < b$  temos

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \int_a^b u dx \right) + F(u(b, t)) - F(u(a, t)) = \frac{d}{dt} [u_l(\xi(t) - a) + u_r(b - \xi(t))] + F(u_r) - F(u_l),$$

logo  $(u_l - u_r)\xi'(t) = F(u_l) - F(u_r)$ , obtendo

$$\xi'(t) = \frac{\llbracket F(u) \rrbracket}{\llbracket u \rrbracket} :$$

a curva deve ser uma reta cuja inclinação depende do salto.

No caso mais complexo em que a curva de equação  $x = \xi(t)$  separe duas regiões na quais a solução é regular, aplicando a mesma conta e fazendo  $a$  e  $b$  tender a  $\xi(t)$ , obtemos que em cada ponto da curva vale

$$\xi'(t) = \frac{\llbracket F(u) \rrbracket(\xi(t), t)}{\llbracket u \rrbracket(\xi(t), t)}.$$

Esta é chamada **condição de salto de Rankine-Hugoniot**: qualquer solução integral que possua uma descontinuidade deve satisfazê-la.

As descontinuidades nestas soluções integrais são chamadas de **choque**, em analogia com a gasdinâmica.

**Observação 3.6.** Observe que no caso linear  $F(u) = cu$  (ou até considerando  $F(x, t, u) = c(x, t)u$ ) a condição de Rankine-Hugoniot torna-se  $\xi'(t) = \frac{[F(x, t, u)]}{[u]}(\xi(t), t) = \frac{c(x, t)[u]}{[u]}(\xi(t), t) = c(\xi(t), t)$ , isto é, as descontinuidades viajam exatamente ao longo das projeções características.

O mesmo acontece no caso quasilinear se considerarmos singularidades mais fracas, isto é, soluções integrais que sejam contínuas mas possuam descontinuidades nas derivadas primeiras. Neste caso a relação de Rankine-Hugoniot perde de significado mas, derivando com respeito a  $x$  obtemos  $\xi'(t) = \frac{[F'(u)u_x](\xi(t), t)}{[u_x](\xi(t), t)} = F'(u(\xi(t), t))$ : obtemos então que este tipo de singularidade viaja ao longo das projeções características (que neste caso estão bem definidas ao longo de  $\xi(t)$  pois dependem apenas de  $u$  que é contínua).

Estudaremos melhor o comportamento de singularidades nas soluções de equações hiperbólicas na seção 5.2 ◀

Considere os dois exemplos a seguir:

*Exemplo 3.7.* Consideremos o problema de Riemann (3.10) para a equação de Burger  $u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0$ .

No caso  $u_l = 1$  e  $u_r = 0$  a condição de Rankine-Hugoniot é  $\xi'(t) = \frac{1/2}{1}$ , logo uma possível solução é

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < t/2 \\ 0 & \text{se } x > t/2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Se a condição inicial é  $u_l = 0$  e  $u_r = 1$  então a condição de Rankine-Hugoniot é ainda  $\xi'(t) = \frac{1/2}{1}$ , dando a possível solução é

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < t/2 \\ 1 & \text{se } x > t/2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Observe-se porém que tentando resolver por características no primeiro caso teríamos cruzamento de proj. características desde o primeiro instante (as características são  $t = x + x_0$  para  $x_0 < 0$  e  $t = x_0$  para  $x_0 > 0$ ), logo realmente não tem como existir solução regular.

Por outro lado, no segundo caso a resolução por características não leva a nenhum cruzamento de proj. características (elas são  $t = x_0$  para  $x_0 < 0$  e  $t = x + x_0$  para  $x_0 > 0$ ), ao contrário, elas deixam uma região vazia entre a característica  $t = 0$  e a  $t = x$ . Uma solução integral é obviamente a (3.12) mas podemos verificar que também

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x/t & \text{se } 0 < x < t \\ 1 & \text{se } x > t. \end{cases} \quad (3.13)$$

satisfaz a formulação integral (verifique!). Chamaremos esta solução de “leque de características”: é construída impondo, em cada ponto  $(x, t)$  da região indeterminada, o valor de  $u$

que produza uma característica com a velocidade certa para conectar o ponto com a descontinuidade em  $t = 0$ .

Podemos inclusive produzir infinitas soluções pois podemos ter a solução de choque (3.12) até um certo instante  $t$  e a partir deste instante ter uma solução como a de (3.13) (leque de características).

★

O exemplo acima mostra que soluções integrais não são em geral únicas, nem sequer perto da superfície dos dados. O que queremos é uma forma de reconhecer a “solução física” das outras: esta solução é chamada de **solução entrópica** e a condição é dita **condição de entropia**.

Existem diferentes (mas equivalentes) possíveis formulações para a condição de entropia, algumas mais intuitivas outras mais complexas mas mais úteis na demonstração de propriedades. Enunciaremos a **condição de entropia** na seguinte forma: *entre as infinitas soluções integrais, uma solução integral entrópica deve satisfazer  $F'(u_l) > \xi' > F'(u_r)$  em todos os choques presentes.*

Como  $F'$  é a velocidade da característica, qualitativamente isso significa que só pode existir choque quando as características “entram” nele (como na solução (3.11) do exemplo 3.7) e não quando “saem” (como na solução (3.12) do exemplo 3.7), logo das infinitas soluções que encontramos no caso  $F'(u_l) < F'(u_r)$  no exemplo 3.7, apenas a (3.13) é entrópica (leque de características).

Com esta condição recuperamos a unicidade, de fato é possível mostrar (veja por exemplo [EV]) que a **solução integral entrópica é única** (e logo coincide com a solução clássica sempre que esta existir).

**Observação 3.8.** Podemos explicar a condição de entropia de várias formas, além do fato que a solução entrópica é a que se aproxima mais à realidade física dos fenômenos que são aproximados pelas equações de conservação.

— As soluções entrópicas são estáveis, no seguinte sentido: aproximando a condição inicial descontínua por uma regular com derivada muito grande, no caso  $F'(u_l) > F'(u_r)$  teríamos solução regular para  $t$  muito pequeno mas logo teria cruzamento de características e necessariamente deverá nascer um choque (entrópico); pelo contrário, no caso  $F'(u_l) < F'(u_r)$  existiria uma (única) solução contínua que se aproxima da solução (entrópica) com leque de características.

— Nas soluções não entrópicas, tem características que nascem no choque: isso significa que a solução nos pontos que estão ao longo destas características não depende diretamente do dato em  $t = 0$ . Isso é contrário ao princípio físico do determinismo; de fato, outra formulação possível da condição de entropia é que todas as características devem poder ser percorridas para trás até o tempo  $t = 0$ .

— Considerando que a equação de conservação é uma aproximação dos fenômenos físicos envolvidos que desconsidera efeitos difusivos (que seriam modelados por termos envolvendo derivadas de segunda ordem), a aproximação torna-se ruim mesmo em vizinhança dos choques, pois lá as variações são importantes e os termos de derivada segunda se tornariam comparáveis aos outros termos. Por isso a solução da equação completa pode ser usada como guia para distinguir as soluções físicas do problema de conservação: de fato, outra formulação (equivalente) da condição de entropia é que a solução entrópica deve ser o limite das soluções da equação completa quando o termo de difusão tende a zero. ◁

**Observação 3.9.** O nome condição de entropia deriva do fato que para o caso da gasdinâmica existe uma condição natural que permite distinguir a solução certa, que vem da quantidade física entropia: ela é conservada nas soluções regulares mas também salta através de um choque: como porém ela é fisicamente uma quantidade que não pode diminuir, a análise do sinal do seu salto permite distinguir um choque físico de um não físico.  $\triangleleft$

*Exercício 3.10.* Escreva a solução com leque de características para a equação genérica  $u_t + F(u)_x = 0$ , supondo que  $F'$  seja uma função estritamente monótona. ★

### 3.2.3 Problemas de conservação em dimensão maior

Podemos generalizar quanto visto ao caso em dimensão espacial maior que um: uma equação de conservação será então uma equação na forma

$$u_t + \operatorname{div}_x(F(u)) = 0,$$

onde  $F$  é um vetor.

A formulação integral da equação será então

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} u \right) + \int_{\partial\Omega} F(u) \cdot n = 0 \quad \text{para todo } t > 0 \text{ e todo } \Omega \text{ limitado regular em } \mathbb{R}^n.$$

O vetor  $F$  representa então o fluxo da substância considerada, assim a formulação integral mostra que a variação da quantidade de substância em  $\Omega$  mais o fluxo que sai pela borda de  $\Omega$  é sempre zero.

É possível também neste caso mostrar a existência de soluções integrais com formação de choque, definir a solução entrópica e mostrar que esta é única.

#### Bibliografia do capítulo

- Principal: [EV] páginas 136..144;  
veja também: [JN] páginas 17,18.  
Se quiser ler mais: [LV].



# Capítulo 4

## Classificação de Equações (de Segunda Ordem)

Como comentamos no final do capítulo 1, precisamos distinguir os diferentes tipos de equações para poder adaptar a técnica de resolução. Começaremos com o caso de equações lineares (ou semilineares) em duas variáveis de segunda ordem.

### 4.1 Equações lineares de ordem dois em duas variáveis

Considere a equação diferencial linear em duas variáveis independentes:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (4.1)$$

onde os coeficientes  $a, b, c, d, f$  e  $g$  podem depender de  $x$  e  $y$ , com regularidade pelo menos  $\mathcal{C}^1$ .

Temos três casos típicos para os coeficientes dos termos de grau dois, chamados de **formas canônicas**, que são:

- (H)  $a = -c = 1, b = 0$  (ou, o que é o mesmo a menos de uma rotação,  $b = 1, e a = c = 0$ ): operador da onda  $u_{xx} - u_{yy}$  ou  $u_{xy}$ , neste caso  $char_L$  é composto por 2 retas ortogonais;
- (E)  $a = c = 1, b = 0$ : é o caso do operador Laplaciano  $u_{xx} + u_{yy}$ , que como vimos é um operador elíptico, isto é,  $char_L = \emptyset$ .
- (P)  $a = 1, b = c = 0$ : operador do calor ou degenerado, neste caso  $char_L$  é composto por uma reta.

O interessante é que (quase) toda equação da forma (4.1) pode ser reduzida, pelo menos localmente, a uma dessas três formas, através de uma mudança de variáveis.

Um papel importante na classificação da equação (4.1) é jogado pelo sinal do determinante  $\Delta = b^2 - ac$ , de fato este sinal é invariante com respeito a mudanças de variáveis.

Para ver isso observemos que o operador diferencial  $a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy}$  pode ser escrito formalmente como  $\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$  onde  $\partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}$  e  $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ .

Dada a mudança de variáveis  $\mathbf{z} = G(\mathbf{x})$ , onde denotamos por  $\mathbf{z} = (z, w)$  e  $\mathbf{x} = (x, y)$ , lembramos (veja na seção 1.2.1) que  $\partial_{\mathbf{x}} = J_G^t \partial_{\mathbf{z}}$ , logo  $\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} = J_G \mathcal{A} J_G^t \partial_{\mathbf{z}} \cdot \partial_{\mathbf{z}}$ , isto é, a matriz  $\tilde{\mathcal{A}}$  correspondente à  $\mathcal{A}$  nas novas variáveis é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}} &= \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J_G \mathcal{A} J_G^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 & az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y \\ az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y & aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 \end{bmatrix}, \quad (4.2) \end{aligned}$$

assim, os novos coeficientes são

$$A = az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2, \quad (4.3)$$

$$B = az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y, \quad (4.4)$$

$$C = aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2. \quad (4.5)$$

É claro que

$$-\tilde{\Delta} = AC - B^2 = \det(\tilde{\mathcal{A}}) = \det(\mathcal{A})\det(J_G)^2 = (-\Delta)\det(J_G)^2 = (ac - b^2)(z_xw_y - z_yw_x)^2,$$

o que indica que *o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis* (lembre que  $\det(J_G) \neq 0$ ).

**Observação 4.1.** Observe-se que as expressões (4.3) e (4.5) podem ser lidas como  $\chi_L((z_x, z_y))$  e  $\chi_L((w_x, w_y))$ , então correspondem ao polinômio característico calculado em  $\nabla z$  e  $\nabla w$  (as normais às curvas de nível de  $z$  e  $w$ ).

As três formas canônicas correspondem, respectivamente, a  $\Delta$  positivo no caso (H), negativo no (E) e nulo no (P). Baseado na invariância de  $\Delta$  definimos:

**Definição 4.2.** Dizemos que a equação (4.1) é:

(H) **Hiperbólica** se  $\Delta = b^2 - ac > 0$ ,

(E) **Elíptica** se  $\Delta = b^2 - ac < 0$ ,

(P) **Parabólica** se  $\Delta = b^2 - ac = 0$ .

**Observação 4.3.** Os nomes dados aos três tipos dizem respeito à forma quadrática (polinômio característico)  $\chi_L(\xi_1, \xi_2) = a\xi_1^2 + 2b\xi_1\xi_2 + c\xi_2^2$ , cujas curvas de nível definem, respectivamente, hipérbolas, elipses ou parábolas. Em particular, a definição de elipticidade para a equação (4.1) é coerente com a dada na seção 1.3.1, já que se  $\Delta < 0$  então  $\chi_L(\xi_1, \xi_2) = 0$  implica  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ .  $\triangleleft$

O objetivo desta seção é mostrar que

**Teorema 4.4.** *Se a equação (4.1) é realmente de segunda ordem e é do mesmo tipo (H, E ou P) em todo um aberto, então pode (pelo menos localmente) ser transformada, através de uma mudança de variáveis, numa nova equação onde os termos de grau dois estão na forma canônica correspondente.*

**Observação 4.5.** Se os coeficientes são contínuos é claro que se uma equação é elíptica ou hiperbólica em um ponto então o será em toda uma vizinhança dele, mas isso poderia ser falso no caso parabólico, por isso precisamos assumir explicitamente que o tipo seja constante num aberto.

Também poderia não existir uma única mudança de variáveis que sirva para um certo aberto dado, mas sempre podemos encontrar um aberto menor no qual obter a forma canônica (veja o exemplo 4.9).  $\triangleleft$

**Observação 4.6.** Sabemos da álgebra linear que dada uma matriz  $2 \times 2$  simétrica  $A$ , sempre existe uma matriz  $M$  ortonormal tal que  $MAM^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$  e normalizando oportunamente as linhas de  $M$  podemos reduzir os casos a  $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ ,  $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm 1$ , ou um dos dois nulo.

Isso resolveria nosso problema, mas funciona apenas no caso de coeficientes constantes, pois em geral a matriz  $M$  dependeria do ponto e poderia não existir uma mudança de variáveis que tenha esta  $M$  por Jacobiano. Por isso precisaremos trabalhar de maneira diferente.  $\triangleleft$

### 4.1.1 O caso hiperbólico $\Delta > 0$

Quando  $\Delta > 0$  mostraremos que é sempre possível levar a equação à forma  $u_{zw} + \dots = 0$ , onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor que dois.

Para ter a forma procurada precisamos impor  $A = C = 0$ ; podemos assumir sem perda de generalidade (pelo menos localmente) que  $a \neq 0$ , pois  $a$  e  $c$  podem ser trocadas trocando as variáveis entre elas e se fossem ambas nulas já teríamos terminado.

Como por hipótese  $\Delta = b^2 - ac > 0$ , a equação  $A = 0$  fatora:

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = a(z_x - \lambda_1z_y)(z_x - \lambda_2z_y) = 0,$$

onde  $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$  (em geral dependendo de  $(x, y)$ ).

Como a estrutura da equação  $C = 0$  é idêntica, ela fatora da mesma maneira e temos então duas equações independentes para determinar  $z$  e  $w$ :

$$(z_x - \lambda_1z_y) = 0, \tag{4.6}$$

$$(w_x - \lambda_2w_y) = 0. \tag{4.7}$$

Precisamos então resolver estas duas equações de primeira ordem, o que será sempre possível impondo arbitrariamente dois problemas de Cauchy não-característicos e pelos quais  $z_y \neq 0$  e  $w_y \neq 0$ : por exemplo impondo os dados  $z(k, y) = y$  e  $w(k, y) = y$  ao longo de uma reta vertical  $x = k$  que corte o aberto considerado.

Pela teoria do capítulo 2, sabemos que uma solução  $\mathcal{C}^1$  existe em vizinhança desta reta. Desta maneira obtemos, localmente, a transformação  $(z, w) = G(x, y)$ . Observe-se que  $\frac{z_x}{z_y} = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \frac{w_x}{w_y}$  e então a transformação obtida satisfaz  $\det(J_G) \neq 0$ .

**Definição 4.7.** As curvas  $z = \text{const}$  e  $w = \text{const}$  são ditas **curvas características** da equação; as novas variáveis  $z$  e  $w$  são ditas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica).

[Observe que seria mais apropriado, em conformidade com as definições do capítulo 2, chamar

estas curvas de projeções características, pois elas são curvas no plano  $xy$  das variáveis e não no espaço  $xyw$  onde está o gráfico da solução. Porém é mais usado na bibliografia o nome de curvas características.]

**Observação 4.8.** As curvas características de (4.1) correspondem às projeções características das duas equações (4.6) e (4.7). Pela observação 4.1 elas tem a propriedade que suas normais são vetores característicos (isto é,  $\chi(\nabla z) = \chi(\nabla w) = 0$ ), de maneira que são características no sentido do capítulo 1: um problema de Cauchy posto ao longo de uma dessas curvas seria característico.

O que interessa de  $z$  e  $w$  é a mudança de coordenadas que definem; como as equações (4.6) e (4.7) dizem que  $z$  e  $w$  são constantes ao longo das respectivas projeções características, o que realmente importa é determinar as duas famílias de características: o particular problema de Cauchy escolhido apenas trará uma reparametrização das duas famílias mas que não mudará o desenho das curvas de nível de  $z$  e  $w$ .

Outra interpretação das contas acima é a seguinte: se a curva de nível de  $z$  é na forma  $y = y(x)$ , então  $z(x, y(x)) = \text{const}$  e logo  $z_x(x, y(x)) + z_y(x, y(x))y'(x) = 0$ , isto é,  $y'(x) = -\lambda_1(x, y(x))$ , que se torna uma EDO para determinar a característica (curva de nível de  $z$ ).

Repare enfim que a variedade característica num ponto  $(x, y)$  é composta, conforme definição no capítulo 1, pela duas retas normais às curvas características por  $(x, y)$ .  $\triangleleft$

Pelas contas feitas, passando às variáveis características, a equação se torna (lembre da seção 1.2.1 que os termos de grau menor mudam de maneira complicada, e poderiam inclusive aparecer mesmo não tendo na equação original)  $Bu_{zw} + \dots = 0$ , e como  $B \neq 0$  (se fosse nulo teríamos  $\Delta = 0$ ) podemos corta-lo obtendo a forma canônica de (H)  $u_{zw} + \dots = 0$  (ou a equivalente  $u_{zz} - u_{ww} + \dots = 0$  aplicando uma ulterior rotação de  $45^\circ$ ).

*Exemplo 4.9.* • Se a equação é  $u_{xy} = 0$  obviamente já estamos em coordenadas características, de fato (4.6-4.7) seriam  $z_x = 0$  e  $w_y = 0$  e logo as curvas características seriam  $y = \text{const}$  e  $x = \text{const}$

- Se a equação é  $u_{xx} - u_{yy} = 0$  então (4.6-4.7) tornam-se

$$\begin{aligned} (z_x - z_y) &= 0, \\ (w_x + w_y) &= 0, \end{aligned}$$

logo  $z = x + y$  e  $w = x - y$  e as curvas características serão  $x = \pm y$ .

- Se a equação é  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$  (hiperbólica em cada quadrante aberto de  $\mathbb{R}^2$ ) então (4.6-4.7) tornam-se

$$\begin{aligned} (xz_x - yz_y) &= 0, \\ (xw_x + yw_y) &= 0. \end{aligned}$$

Neste caso não conseguiremos uma única mudança de variáveis explícita, no primeiro quadrante podemos usar os problemas de Cauchy  $z(x, 1) = x$  e  $w(x, 1) = x$  para obter explicitamente as coordenadas características  $z = xy$  e  $w = x/y$ .

A curvas características serão as hipérbolas  $xy = \text{const}$  e as semiretas  $y/x = \text{const}$ .



### 4.1.2 O caso parabólico $\Delta = 0$

Quando  $\Delta = 0$  em todo um aberto, mostraremos que é sempre possível levar a equação à forma  $u_{ww} + \dots = 0$ , onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor.

Sem perda de generalidade, podemos de novo supor  $a \neq 0$ , pois  $a = c = 0$  implicaria  $b = 0$ .

Argumentando como no caso hiperbólico chegamos a fatorar a equação  $A = 0$  na forma

$$a(z_x - \lambda_1 z_y)^2 = 0 :$$

isso nos permite calcular  $z$  como anteriormente resolvendo (4.6), mas com respeito ao caso hiperbólico não podemos impor  $C = 0$  para determinar  $w$  pela equação  $a(w_x - \lambda_1 w_y)^2 = 0$  pois assim  $w$  não resultaria independente de  $z$ .

Verifiquemos porém que qualquer escolha para  $w$ , desde que seja independente de  $z$ , leva a equação na forma canônica para (P): de fato, uma vez que  $A = 0$  e  $\Delta = 0$  necessariamente  $B = 0$ , logo obtemos a forma  $Cu_{ww} + \dots = 0$ , e como  $C \neq 0$  (se fosse nulo a equação não seria realmente de segunda ordem) podemos corta-lo obtendo a forma canônica de (P)  $u_{ww} + \dots = 0$ .

No caso parabólico definimos

**Definição 4.10.** *As curvas  $z = \text{const}$  (apenas) são ditas **curvas características da equação**; de novo as novas variáveis  $z$  e  $w$  são ditas **coordenadas características**.*

Observe que de fato as curvas  $w = \text{const}$  não tem a propriedade que  $\chi(\nabla w) = 0$ , (já que se isso acontecesse  $w$  não seria independente de  $z$ ) e um problema de Cauchy posto ao longo de uma dessas curvas não seria característico.

*Exemplo 4.11.* Considere a equação  $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$  (parabólica em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ): a equação para as características torna-se  $(xz_x + yz_y)^2 = 0$ , dando (para  $y > 0$ )  $z = x/y$  (as curvas características são todas as semiretas pela origem); podemos escolher  $w = x^2 + y^2$  (assim  $z_x w_y - w_x z_y = 2\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) \neq 0$ ) obtendo a forma canônica  $u_{ww} = 0$ . Observe que de fato esta equação diz exatamente que a derivada segunda em direção radial é nula. ★

### 4.1.3 O caso elíptico $\Delta < 0$

No caso elíptico  $\Delta < 0$  precisaríamos levar a equação à forma  $u_{zz} + u_{ww} + \dots = 0$ , onde no lugar dos pontinhos haverá apenas termos de ordem menor, isto é impor  $A = C$  e  $B = 0$ .

Infelizmente neste caso as equações obtidas não fatoram como nos casos anteriores, de maneira que será necessário obter contemporaneamente as duas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica) através de uma equação bem mais complicada. Neste caso não existem **curvas características**, de fato, as curvas  $z = \text{const}$  e  $w = \text{const}$  não têm a propriedade que  $\chi(\nabla z) = \chi(\nabla w) = 0$ , (já que  $\chi(v) = 0$  apenas se  $v = 0$ ) e um problema de Cauchy posto ao longo de uma dessas curvas não seria característico.

Esboçaremos as contas que levam à forma canônica no caso elíptico, apenas para dar uma idéia, já que na prática a resolução do problema que resulta é tão complicada quanto o problema original, logo a transformação do problema na forma canônica não é uma técnica útil no caso elíptico.

As equações  $A = C$  e  $B = 0$  são

$$a(z_x^2 - w_x^2) + c(z_y^2 - w_y^2) + 2b(z_x z_y - w_x w_y) = 0, \quad (4.8)$$

$$az_x w_x + b(z_x w_y + z_y w_x) + cz_y w_y = 0; \quad (4.9)$$

para poder fatorar as equações passaremos a trabalhar em  $\mathbb{C}$ : somando (4.8) com (4.9) multiplicada por  $2i$  obtemos

$$a(z_x^2 - w_x^2 + 2iz_x w_x) + 2b(z_x z_y - w_x w_y + i(z_x w_y + z_y w_x)) + c(z_y^2 - w_y^2 + 2iz_y w_y) = 0; \quad (4.10)$$

definindo a função complexa  $\eta = z + iw$  isso se torna

$$a\eta_x^2 + 2b\eta_x \eta_y + c\eta_y^2 = 0, \quad (4.11)$$

que em  $\mathbb{C}$  dá

$$\frac{\eta_x}{\eta_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (4.12)$$

assim

$$a(z_x + iw_x) = \left(-b \pm i\sqrt{-\Delta}\right) (z_y + iw_y), \quad (4.13)$$

cujas partes reais e imaginárias dão o sistema acoplado de duas equações lineares de primeira ordem

$$\begin{cases} az_x &= -bz_y \mp \sqrt{-\Delta}w_y, \\ aw_x &= \pm\sqrt{-\Delta}z_y - bw_y : \end{cases} \quad (4.14)$$

chegamos a quebrar o problema original (duas equações quadraticas) em duas equações lineares, mas ainda acopladas, que permitem determinar  $z$  e  $w$  simultaneamente.

Outra possibilidade de resolução é obter  $w_y$  da primeira equação, usá-la para obter  $w_x$  da segunda e obter

$$\begin{cases} -w_y = \frac{az_x + bz_y}{\sqrt{-\Delta}} \\ w_x = \frac{b}{a} \left( \frac{az_x + bz_y}{\sqrt{-\Delta}} \right) + \frac{\sqrt{-\Delta}}{a} z_y = \frac{b}{\sqrt{-\Delta}} z_x + \frac{b^2 + \sqrt{-\Delta}^2}{a\sqrt{-\Delta}} z_y = \frac{bz_x + cz_y}{\sqrt{-\Delta}}; \end{cases}$$

enfim, derivando respeito a  $x$  a primeira, respeito a  $y$  a segunda e somando, obtemos a **equação de Beltrami**

$$\left( \frac{az_x + bz_y}{\sqrt{-\Delta}} \right)_x + \left( \frac{bz_x + cz_y}{\sqrt{-\Delta}} \right)_y = 0; \quad (4.15)$$

esta equação linear de segunda ordem permite obter  $z$  para depois encontrar  $w$  pela (4.14).

Como dissemos antes, a dificuldade desta equação é parecida à da equação original, de maneira que sua utilidade é mais teórica que prática.

#### 4.1.4 Alguns exemplos

*Exemplo 4.12.* Consideremos a equação (parabólica linear a coeficientes constantes)

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = u_x - u_y. \quad (4.16)$$

A equação para determinar  $z$  é

$$z_x^2 + 2z_x z_y + z_y^2 = (z_x + z_y)^2 = 0;$$

pondo as condições  $z(x, 0) = x$  obtemos  $z = x - y$ . Defina-se  $w = y$ , assim

$$z_x w_y - z_y w_x = 1 \neq 0.$$

Logo  $(z, w) = (x - y, y) = G(x, y)$  define uma mudança de variáveis que reduz a equação à sua forma canônica. De fato,

$$J_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = J_G^t \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_z & \partial_{xx} &= \partial_{zz} \\ \partial_y &= \partial_w - \partial_z & \partial_{xy} &= \partial_{wz} - \partial_{zz} \\ & & \partial_{yy} &= \partial_{ww} - 2\partial_{zw} + \partial_{zz} \end{aligned}$$

e a equação fica

$$u_{ww} = 2u_z - u_w.$$

★

*Exemplo 4.13.* Considere a equação elíptica

$$u_{xx} + (1 + x^2)u_{yy} = 0. \quad (4.18)$$

Como o coeficiente variável depende apenas de  $x$  podemos pôr a equação na forma canônica facilmente, procurando uma mudança de coordenadas na forma  $(\xi, \eta) = (\phi(x), y)$ . Assim

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \phi'(x), \\ u_{xx} &= [\phi'(x)]^2 u_{\xi\xi} + \phi''(x) u_\xi; \end{aligned}$$

substituindo na equação inicial obtemos

$$[\phi'(x)]^2 u_{\xi\xi} + \phi''(x) u_\xi + (1 + x^2) u_{\eta\eta} = 0 :$$

logo queremos  $\phi'(x) = \sqrt{1 + x^2}$ , isto é,

$$\phi(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2} dt.$$

Finalmente, a equação torna-se

$$(1 + x^2)[u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}] + \left( \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) u_\xi = 0$$

ou

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = - \left( \frac{x}{(\sqrt{1 + x^2})^3} \right) u_\xi.$$

★

*Exemplo 4.14* (Equação de Tricomi). A equação

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0 \quad (4.19)$$

é chamada **Equação de Tricomi**, e é um modelo importante por ser o mais fácil exemplo de uma equação que muda de tipo: de fato  $b^2 - ac = y$  e portanto

- para  $y > 0$ , tem-se  $b^2 - ac > 0$  assim a equação é hiperbólica,
- para  $y < 0$ , tem-se  $b^2 - ac < 0$  assim a equação é elíptica,
- para  $y = 0$ , tem-se  $b^2 - ac = 0$  assim a equação é parabólica.

Procuraremos as formas canônicas dos casos (a) e (b), já que o caso parabólico não pode ser levado na forma canônica pois encontra-se apenas sobre a reta  $y = 0$  e não num aberto.

- Para  $y > 0$ , (4.6-4.7) tornam-se

$$\begin{aligned} (z_y - \sqrt{y}z_x) &= 0, \\ (w_y + \sqrt{y}w_x) &= 0; \end{aligned}$$

integrando obtemos

$$z = 3x + 2y^{\frac{3}{2}} \quad \text{e} \quad w = 3x - 2y^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto, a mudança de coordenadas será:

$$(z, w) = G(x, y) = (3x + 2y^{\frac{3}{2}}, 3x - 2y^{\frac{3}{2}}),$$

cujo Jacobiano é

$$J_G = 3 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{y} \\ 1 & -\sqrt{y} \end{pmatrix}$$

e a inversa é  $x = \frac{z+w}{6}$ ,  $y = \left(\frac{z-w}{4}\right)^{2/3}$ . Assim

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} = J_G^t \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +\sqrt{y} & -\sqrt{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_z \\ \partial_w \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_x &= 3(\partial_z + \partial_w) & \partial_{xx} &= 9(\partial_{zz} + 2\partial_{zw} + \partial_{ww}) \\ \partial_y &= 3\sqrt{y}(\partial_z - \partial_w) & \partial_{yy} &= 9y \left( \partial_{zz} - 2\partial_{zw} + \partial_{ww} + \frac{y_z}{y}(\partial_z - \partial_w) \right); \end{aligned}$$

de fato,  $3\sqrt{y}(\partial_z - \partial_w)[3\sqrt{y}] = 9\sqrt{y}\frac{1}{2\sqrt{y}}(y_z - y_w) = 9y_z$  já que  $y_w = -y_z$ . Além disso

$$\frac{y_z}{y} = \frac{2}{3(z-w)}.$$



Finalmente, substituindo na EDP inicial tem-se

$$9y \left( \partial_{zz} - 2\partial_{zw} + \partial_{ww} + \frac{yz}{y}(\partial_z - \partial_w) \right) - 9y(\partial_{zz} + 2\partial_{zw} + \partial_{ww}) = 0$$

e substituindo  $\frac{yz}{y}$  obtemos

$$u_{zw} - \frac{1}{6(z-w)}(u_z - u_w) = 0.$$

- b. Para  $y < 0$  procuramos uma mudança de variável na forma  $z = x$ ,  $w = \phi(y)$ : assim  $u_y = \phi' u_w$  e  $u_{yy} = [\phi']^2 u_{ww} + \phi'' u_w$ . Impondo  $[\phi']^2 = -y$  obtemos  $\phi(y) = -\frac{2}{3}(\sqrt{-y})^3$  e a equação torna-se

$$-y \left( u_{ww} + u_{zz} - \frac{1}{2(\sqrt{-y})^3} u_w \right) = 0$$

e enfim

$$u_{ww} + u_{zz} + \frac{1}{3w} u_w = 0.$$

★

## 4.2 Equações lineares de segunda ordem em $n$ variáveis

A classificação da seção anterior é específica para a equação (4.1), isto é, para o caso de segunda ordem em duas variáveis. Nesta seção consideramos o caso de uma equação linear de ordem dois em *mais de duas variáveis*, cuja parte de ordem máximo pode ser escrita como

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x) \partial^\alpha u. \quad (4.20)$$

Como feito na seção anterior, podemos escrever formalmente o operador correspondente a (4.20) como  $\mathcal{A} \partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$  onde agora  $\partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{bmatrix}$  e

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2a_{2e_1} & a_{e_1+e_2} & \cdots & a_{e_1+e_n} \\ a_{e_1+e_2} & 2a_{2e_2} & \cdots & a_{e_2+e_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{e_1+e_n} & a_{e_2+e_n} & \cdots & 2a_{2e_n} \end{bmatrix}.$$

Como comentado na observação 4.6, se fixarmos um ponto  $x_0 \in \Omega$  então a matriz simétrica constante  $\mathcal{A}_{x_0}$  pode ser diagonalizada por uma matriz  $M$  ortonormal, isto é, existe uma mudança de variáveis linear tal que a nova matriz  $\tilde{\mathcal{A}}_{x_0}$  no ponto transformado de  $x_0$  seja diagonal, e

ainda re-escalando e reordenando as variáveis podemos mudar o módulo (mas não o sinal) dos coeficiente, chegando à matriz  $\tilde{\mathcal{A}}_{x_0}$  na forma a blocos

$$\tilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \begin{bmatrix} I_{N_p} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{N_z} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

onde  $I_{N_p}$ ,  $I_{N_n}$  e  $0_{N_z}$  são, respectivamente, matriz identidade de dimensão o número de autovalores positivos, de dimensão o número de autovalores negativos e matriz nula de dimensão o número de autovalores nulos. Esta matriz corresponde então às formas canônicas que podemos escrever como

$$\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \dots = 0, \quad (4.22)$$

onde escrevemos as variáveis separando as primeiras  $N_p$  componentes no vetor  $\mathbf{x}$ , as segundas  $N_n$  no vetor  $\mathbf{y}$  e as últimas  $N_z$  em  $\mathbf{z}$ .

Diferentemente do caso em duas variáveis porém, não conseguiremos em geral obter uma mudança de variáveis que nos leve à forma (4.22) em todo um aberto: de fato, para fazer isso precisaríamos satisfazer as  $n(n-1)/2$  relações que põem a zero os coeficiente fora da diagonal e mais outras relações de normalização, tendo apenas as  $n$  componentes da mudança de variável para escolher: com  $n = 2$  era suficiente uma condição para pôr  $B = 0$  e outra para pôr  $A = \pm C$  (ou  $A = 0$ ), para  $n = 3$  ainda poderíamos diagonalizar a matriz mas não igualar os três coeficientes diagonais, enquanto para  $n \geq 4$  nem a diagonalização seria possível em geral.

Mesmo sem poder transformar a equação na forma canônica em todo um aberto, podemos usar a forma (4.21) para catalogar as equações:

**Definição 4.15.** *A equação correspondente a (4.20) diz-se:*

1. **elíptica** no ponto  $x_0$  se  $\tilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \pm I$  (isto é, se  $N_p$  ou  $N_n$  é  $n$  e os outros zero: os autovalores de  $\mathcal{A}_{x_0}$  não são nulos e tem todos o mesmo sinal); de fato, neste caso  $\mathcal{A}_{x_0}$  é definida positiva ou definida negativa e o polinômio característico  $\text{char}(\xi) = \xi^t \mathcal{A}_{x_0} \xi$  seria nulo apenas para  $\xi = 0$ ;
2. **hiperbólica** no ponto  $x_0$  se

$$\tilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \begin{pmatrix} I_{N_p} & \\ & -I_{N_n} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

com  $N_p, N_n > 0$ , isto é, os autovalores de  $\mathcal{A}_{x_0}$  não são nulos mas tem sinais diferentes;

3. **parabólica** no ponto  $x_0$  se  $\det \tilde{\mathcal{A}}_{x_0} = 0$ , isto é, existem autovalores nulos ( $N_z > 0$ ).

Distinguiremos também os seguintes casos entre as hiperbólicas:

- **normalmente hiperbólica** no ponto  $x_0$  se  $N_p = 1$  ou  $N_n = 1$ , desta maneira a forma canônica será do tipo  $\partial_{xx}u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}}u(x, \mathbf{y}) + \dots = 0$  (equação da onda);

- **ultrahiperbólica** no ponto  $x_0$  se  $N_p, N_n > 1$ : este caso é muito difícil e sobre ele existem pouquíssimos resultados, mas também não existem problemas físicos modelados por equações deste tipo.

Entre as parabólicas, se  $N_z = 1$  e  $N_n$  (ou  $N_p$ ) é nulo, isto é, se a forma canônica é do tipo  $\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, z) + \dots = 0$ , ainda distinguimos o caso  $\Delta_{\mathbf{x}}u(\mathbf{x}, z) + u_z + \dots = 0$ , que é do *tipo da equação do calor*, e o caso onde nem  $u_z$  aparece na equação, que será então *degenerada*, no sentido que é como se a variável  $z$  fosse apenas um parâmetro. Sobre outros tipos de parabólicas (por exemplo,  $u_t = u_{xy}$ ) quase não existem resultados nem aplicações físicas.

*Exemplo 4.16.* 1. Seja  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u_x - u_y - u_z$ .  
A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

logo o polinômio característico é:  $p(\lambda) = (1 - \lambda)^3 - (1 - \lambda) = (1 - \lambda)((1 - \lambda)^2 - 1)$  cujas raízes são:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 2$ . Assim a equação é de tipo parabólico e em novas variáveis poderá ser escrita na forma  $u_{xx}(x, y, z) + 2u_{yy}(x, y, z) + \dots = 0$ .

2. Seja  $yu_{xx} + u_{yy} + 2zu_{yz} = 0$ .  
A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix},$$

logo o polinômio característico é  $p(\lambda) = (\lambda - y)(1 - \lambda)\lambda - z^2(y - \lambda)$ , cujas raízes são:  
 $\lambda_1 = y$ ,  $\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$  e  $\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$ . Assim temos dois casos:

Caso I. Se  $yz = 0$  então  $\lambda_1 = 0$  ou  $\lambda_3 = 0$  e a equação é parabólica (planos  $y = 0$  e  $z = 0$ ).

Caso II. Se  $y \neq 0$  e  $z \neq 0$ , tem-se  $\lambda_2 > 0$  e  $\lambda_3 < 0$ , uma vez que  $\sqrt{1 + 4z^2} > 1$ , assim a equação é hiperbólica.



**Definição 4.17.** No caso em dimensão maior que dois, chamaremos **superfície característica da equação**, qualquer superfície que seja característica em todo ponto: dessa maneira, se for na forma  $z(\mathbf{x}) = \text{const}$ , satisfará  $\nabla z \mathcal{A} \nabla z^t = 0$  em todo ponto.

*Exemplo 4.18.* • Para a equação

$$u_{tt} = u_{yy} + u_{xx} \tag{4.24}$$

(onda em três variáveis), ponhamos  $\nabla z \mathcal{A} \nabla z^t = z_t^2 - z_x^2 - z_y^2 = 0$ : como  $z_t = 0$  implicaria  $z = \text{const}$ , podemos fixar  $z_t = 1$  obtendo

$$z_x^2 + z_y^2 = 1 : \quad (4.25)$$

a equação da ótica geométrica em duas variáveis. As superfícies características de (4.24) correspondem às soluções de (4.25) da seguinte maneira: se  $\zeta(x, y)$  é sol de (4.25) então as superfícies de nível de  $z(x, y, t) = \zeta(x, y) + t$  são superfícies características de (4.24).

Da mesma maneira, as soluções da equação da ótica geométrica em  $n$  variáveis  $|\nabla z|^2 = 1$ , fornecem superfícies características da equação da onda em  $n + 1$  variáveis.

- Calculemos as superfícies características que correspondem às soluções conoidais pela origem da equação da ótica geométrica correspondente, para as seguintes equações hiperbólicas:
  - equação:  $u_{tt} = u_{xx}$ , características:  $z_x^2 = z_t^2 = 1$ : são as retas  $t = \pm x$ ;
  - equação:  $u_{tt} = u_{xx} + y_{yy}$ , características:  $z_x^2 + z_y^2 = z_t^2 = 1$ , são os cones  $t = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
  - equação:  $u_{tt} = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ , características:  $\sum_{i=1}^n z_{x_i}^2 = z_t^2 = 1$ , são os cones  $t = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ;
  - equação:  $u_{tt} + u_{ss} = u_{xx} + y_{yy}$ , características:  $z_x^2 + z_y^2 - z_s^2 = z_t^2 = 1$ , são as superfícies  $\sqrt{s^2 + t^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Uma diferença qualitativa importante é a seguinte: no primeiro caso as retas dividem o plano em 4 regiões separadas, no segundo e terceiro as superfícies dividem  $\mathbb{R}^n$  em três regiões, enquanto no último caso (ultrahiperbólico) a superfície divide  $\mathbb{R}^n$  em apenas duas regiões.

- No caso de uma *equação parabólica*, a cada autovalor  $\lambda_i$  nulo corresponde uma superfície característica da equação com normal na direção do autovetor correspondente. No caso da equação do calor (na qual os demais autovalores têm o mesmo sinal) não haverá outras superfícies características.

★

### 4.2.1 O caso a coeficientes constantes

Na seção anterior vimos que em geral é possível pôr uma equação de ordem dois em dimensão  $n \geq 3$  na forma canônica apenas pontualmente, mas obviamente no caso de equações a coeficientes constantes isso pode ser feito no espaço inteiro.

No caso a coeficientes constantes podemos inclusive chegar a pôr a inteira equação  $Lu = 0$  numa forma muito simples: graças aos resultados da seção anterior sabemos que podemos diagonalizar e normalizar a parte de ordem dois, isto é podemos considerar, sem perda de generalidade, a equação na forma

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

onde os  $a_i$  assumem apenas os valores 1,  $-1$ , 0.

No caso elíptico ou hiperbólico ( $a_i \neq 0$ ), usando a mudança de incognita

$$u(x) = v(x) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2a_i} x_i\right)$$

obtemos

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \left(v_{x_i} - \frac{b_i}{2a_i} v\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2a_i} x_i\right), \\ u_{x_i x_i} &= \left(v_{x_i x_i} - 2\frac{b_i}{2a_i} v_{x_i} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} v\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{2a_i} x_i\right), \end{aligned}$$

logo substituindo na equação e cortando a exponencial chegamos a

$$\sum_{i=1}^n a_i v_{x_i x_i} + \lambda v = 0$$

onde  $\lambda = c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i}$ . Logo qualquer equação de segunda ordem linear a coeficientes constantes elíptica ou hiperbólica pode ser posta na forma  $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , em particular,

- no caso elíptico  $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) + \lambda u(\mathbf{x}) = 0$ ,
- no caso normalmente hiperbólico  $\partial_{xx} u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(x, \mathbf{y}) + \lambda u(x, \mathbf{y}) = 0$ .

Para incluirmos o caso parabólico, consideremos como em (4.22) as variáveis re-agrupadas como  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  correspondendo respectivamente aos autovalores positivos, negativos e nulos; se as  $\mathbf{z}$  são  $n - r$  variáveis então  $a_i = \pm 1$  para  $i = 1, \dots, r$  e aplicando a mudança de incógnita  $u(x) = v(x) \exp\left(-\sum_{i=1}^r \frac{b_i}{2a_i} x_i\right)$  podemos eliminar os  $b_i$  para  $i = 1, \dots, r$  obtendo a forma

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=r+1}^n b_i u_{x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0;$$

enfim, com uma oportuna rotação entre as variáveis  $\mathbf{z}$  podemos alinhar uma delas à direção  $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ : re-agrupando as variáveis como  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t)$  obtemos

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) + b u_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) = 0.$$

## Classificação de equações de ordem maior que 2

Para as equações de ordem maior que 2, a classificação é mais complicada e menos clara, mas ainda fica claro quando uma equação é elíptica, usando o polinômio característico. Assim por exemplo a equação  $u_{xxxx} + 2u_{xyyy} + u_{yyyy} = 0$  é elíptica, já que o polinômio característico  $\chi(\xi, \eta) = \xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = 0$  apenas para  $\xi = \eta = 0$ .

Veremos na seção 5.1 (veja a observação 5.4) uma maneira de definir hiperbolicidade válida para equações de qualquer ordem.

### 4.3 Classificação para equações não lineares

No caso de equações não lineares a classificação dependerá, em geral, não apenas da equação mas também da solução considerada.

- O caso *semilinear* é análogo ao linear, já que a classificação depende apenas dos termos de grau máximo, que neste caso são lineares.
- No caso *quasilinear*, a estrutura dos termos de grau máximo é parecida mas com coeficientes que dependem das derivadas de ordem menor. Por isso não é em geral possível classificar a equação a priori, mas se fixarmos uma solução, então substituindo tal solução nos coeficientes podemos considerá-los dependentes apenas do ponto e classificar a equação como no caso linear. Teremos então casos de equações que são de tipo diferente em correspondência de diferentes soluções (veja o exemplo 4.19).
- No caso *totalmente não linear*, podemos classificar a equação em correspondência de uma certa solução linearizando a equação: consideremos por exemplo

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = F(x, y, v, p, q, r, s, t) = 0. \quad (4.26)$$

Seja  $u$  a solução considerada e  $\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  outra função incógnita: aproximamos

$$\begin{aligned} F(x, y, u + \varepsilon, (u + \varepsilon)_x, (u + \varepsilon)_y, (u + \varepsilon)_{xx}, (u + \varepsilon)_{xy}, (u + \varepsilon)_{yy}) &\simeq \\ &\simeq F + F_v \varepsilon + F_p \varepsilon_x + F_q \varepsilon_y + F_r \varepsilon_{xx} + F_s \varepsilon_{xy} + F_t \varepsilon_{yy} \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde  $F$  e suas derivadas são sempre calculadas em  $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ : (4.27) é agora uma equação linear para  $\varepsilon$ : classificaremos a equação original em correspondência da sua solução  $u$  usando esta equação para  $\varepsilon$ : logo a equação será elíptica, parabólica ou hiperbólica se  $F_s^2 - 4F_r F_t$  for, respectivamente, negativo, nulo ou positivo.

Mais em geral,

$$F(x, (\partial^\alpha(u + \varepsilon))_{|\alpha| \leq k}) \simeq F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial F}{\partial (u_\alpha)}(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}) \partial^\alpha \varepsilon,$$

que é uma equação linear em  $\varepsilon$  com coeficientes que dependem de  $u$ : classificaremos (4.26) segundo o caracter desta equação.

*Exemplo 4.19.* • A equação (quase linear)

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2 u_{yy} = 0, \quad (4.28)$$

onde  $c > 0$  é um parâmetro, é elíptica se  $|u_x| < c$ , parabólica se  $|u_x| = c$  e hiperbólica se  $|u_x| > c$ .

Por exemplo, em correspondência da solução  $u(x, y) = \lambda x$  será elíptica se  $|\lambda| < c$ , parabólica se  $|\lambda| = c$  e hiperbólica se  $|\lambda| > c$ .

Esta equação é um modelo simplificado (velocidade predominantemente horizontal) para o escoamento de um fluido compressível, onde a velocidade do fluido é  $V = \nabla u$  e  $c$  é a velocidade do som.

A versão mais completa dessa equação é

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_xu_yu_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0 : \quad (4.29)$$

neste caso  $\Delta = c^2(|V|^2 - c^2)$ .

Em ambos os casos, onde o escoamento é supersônico a equação é hiperbólica enquanto onde é subsônico ela é elíptica.

- O caracter da equação  $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = C$  (totalmente não-linear) depende de  $C$ : de fato, usando a notação introduzida acima,  $F_s = -2s$ ,  $F_r = t$ ,  $F_t = r$  e logo  $F_s^2 - 4F_rF_t = 4s^2 - 4tr = -4C$ : é elíptica se  $C > 0$ , hiperbólica se  $C < 0$  e parabólica se  $C = 0$ .

Se considerarmos a equação  $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = u$  então o caracter dependeria da solução, mudando em função do sinal dela.

★

Vimos anteriormente que pôr uma equação na forma canônica pode ajudar a obter suas soluções. No caso não linear porém a mudança de variáveis que leva a equação na forma canônica depende da solução: querendo resolver a equação por esta técnica precisará então resolver contemporaneamente os dois problemas, escrevendo um sistema de equações acoplado que forneça solução e coordenadas características. Veja-se por exemplo em [GB] paginas 85...90 e [CH] páginas 163...

Observe-se que esta técnica no caso de primeira ordem é exatamente o que fizemos no capítulo 2: de fato,

— no caso linear pudemos a priori calcular as projeções características, isto é, a mudança de variáveis que transforma o problema na forma canônica  $u_t = f(s, t, u)$ ,

— nos casos não lineares escrevemos o sistema característico em  $n + 1$  ou  $2n + 1$  incógnitas acoplado, que deve ser resolvido para determinar contemporaneamente projeções características e solução.

## 4.4 Transformada de Legendre

Considere uma equação quasilinear em duas variáveis na forma

$$a(u_x, u_y)u_{xx} + 2b(u_x, u_y)u_{xy} + c(u_x, u_y)u_{yy} = 0. \quad (4.30)$$

Suponhamos que

$$(\xi, \eta) = G(x, y) := (u_x(x, y), u_y(x, y))$$

defina uma mudança de variáveis (isto é,  $u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \neq 0$ ) e consideremos a nova incógnita  $\Phi := xu_x + yu_y - u$ : temos então

$$J_G(x, y) = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} = H_u(x, y)$$

e, vista como função de  $\xi$  e  $\eta$ , temos

$$\Phi(\xi, \eta) = x(\xi, \eta)\xi + y(\xi, \eta)\eta - u(G^{-1}(\xi, \eta)).$$

Assim

$$\begin{cases} \Phi_\xi = x_\xi \xi + x + y_\xi \eta - u_x x_\xi - u_y y_\xi = x, \\ \Phi_\eta = x_\eta \xi + y_\eta \eta + y - u_x x_\eta - u_y y_\eta = y, \end{cases}$$

logo a matriz Hessiana

$$H_\Phi(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} = J_{G^{-1}}(\xi, \eta) = J_G^{-1}(G^{-1}(\xi, \eta)) = H_u^{-1}(G^{-1}(\xi, \eta)),$$

isto é,

$$H_\Phi(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \Phi_{\xi\xi} & \Phi_{\xi\eta} \\ \Phi_{\xi\eta} & \Phi_{\eta\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2} \begin{bmatrix} u_{yy} & -u_{xy} \\ -u_{xy} & u_{xx} \end{bmatrix}.$$

Concluimos que (4.30) é equivalente à equação *linear*

$$a(\xi, \eta)\Phi_{\eta\eta} - 2b(\xi, \eta)\Phi_{\xi\eta} + c(\xi, \eta)\Phi_{\xi\xi} = 0. \quad (4.31)$$

**Observação 4.20.** A interpretação geométrica desta transformação (dita **transformação de Legendre** ou **transformação hodográfica**) é a seguinte: estamos usando como variáveis os coeficientes do plano tangente ao gráfico da solução ( $u_x$  e  $u_y$ ) e como incógnita  $\Phi$  o oposto da altura na qual tal plano intersecta o eixo vertical (verifique a conta).

Observe que a transformação é simétrica, no sentido que re-aplicando a transformada de Legendre a  $\Phi$  re-obtemos o problema inicial.

A principal utilidade da transformação é a de transformar o problema quasilinear (4.30) no problema linear (4.31).

*Exemplo 4.21.* Aplicando a transformação à equação do escoamento compressível (4.28) com direção predominante horizontal,  $(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2u_{yy} = 0$  obtemos

$$(c^2 - \xi^2)\Phi_{\eta\eta} + c^2\Phi_{\xi\xi} = 0 : \quad (4.32)$$

esta equação é linear, logo seu caracter depende apenas do ponto, de fato ela é elíptica (escoamento subsônico) na região  $|\xi| < c$ , hiperbólica onde  $|\xi| > c$  (escoamento supersônico) e parabólica ao longo das duas retas  $\xi = \pm c$ . Na região hiperbólica podemos calcular as curvas características (que não dependem da solução) resolvendo as equações

$$z_\xi = \pm \sqrt{(\xi/c)^2 - 1} z_\eta.$$

Observe-se a analogia entre a equação de Tricomi do exemplo 4.14 e a equação (4.32).

No caso da equação completa (4.29)  $(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0$ , obtemos

$$(c^2 - \xi^2)\Phi_{\eta\eta} + 2\xi\eta\Phi_{\eta\xi} + (c^2 - \eta^2)\Phi_{\xi\xi} = 0 : \quad (4.33)$$

agora a região subsônica é o círculo  $|(\xi, \eta)| < c$  e as características são duas famílias de curvas que vivem fora do círculo (região supersônica). ★

## Bibliografia do capítulo



- Seção 4.1:  
principal: [GB] páginas 57..69;  
veja também: [CH] páginas 154...160;
- Exemplo 4.14:  
[CH] páginas 161...163; [JN] páginas 38,39;
- Seção 4.2:  
principal: [GB] páginas 70..77;
- Seção 4.3:  
[GB] páginas 85...90; [CH] páginas 163...;
- Seção 4.4:  
principal: [CH] páginas 32..34; [JN] exercício na página 40.



# Capítulo 5

## Técnicas para equações hiperbólicas

Neste capítulo aprofundaremos o estudo das propriedades e das técnicas de resolução para equações hiperbólicas de segunda ordem em duas variáveis.

### 5.1 Sistemas hiperbólicos em duas variáveis

O problema de Cauchy para a equação linear (4.1)

$$\begin{cases} au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x) \end{cases},$$

pode ser posto na forma de sistema em três incógnitas

$$\begin{cases} u_y = q, & u(x, 0) = \phi(x), \\ p_y = q_x, & p(x, 0) = \phi'(x), \\ ap_x + 2bq_x + cq_y + dp + eq + fu + g = 0, & q(x, 0) = \psi(x); \end{cases} \quad (5.1)$$

mais em geral, vimos na seção 1.4.1 que qualquer EDP pode ser posta em forma de sistema quasilinear de primeira ordem em forma canônica. Por isso é útil estudar brevemente este tipo de sistema.

Consideremos um problema de Cauchy para um sistema linear de primeira ordem em duas variáveis na forma

$$AV_y + BV_x = CV + D, \quad V(x, 0) = \Phi(x), \quad (5.2)$$

onde as matrizes  $A, B, C$  e o vetor  $D$  dependem de  $(x, y)$  e  $V$  é um vetor de  $N$  incógnitas.

Como sempre diremos que o problema é **não-característico** se é possível determinar  $V_y(x, 0)$ , isto é, se  $\det(A) \neq 0$ ; neste caso podemos multiplicar tudo por  $A^{-1}$ , obtendo

$$V_y + \tilde{B}V_x = \tilde{C}V + \tilde{D}, \quad V(x, 0) = \Phi(x). \quad (5.3)$$

Também diremos que a curva de equação  $x = \xi(y)$  é **característica** se o valor de  $V$  ao longo dela não é suficiente para determinar  $V_x$  e  $V_y$ : seja  $V(\xi(y), y) = F(y)$ , logo  $V_x(\xi(y), y)\xi'(y) + V_y(\xi(y), y) = F'(y)$ , isto é,  $V_y = F' - V_x\xi'$ ; substituindo no sistema (5.2) obtemos

$$(-A\xi' + B)V_x = CF + D - AF' :$$

posso determinar  $V_x$  e logo  $V_y$  se  $\det(A\xi' - B) \neq 0$ , logo

a curva  $x = \xi(y)$  é característica se  $\det(A(\xi(y), y)\xi'(y) - B(\xi(y), y)) = 0$  para todo  $y$ .

**Definição 5.1.** Diremos que (5.2) é um **sistema hiperbólico** se  $\tilde{B} := A^{-1}B$  possui  $N$  autovalores reais  $\lambda_i$  e  $N$  autovetores  $\gamma_i$  linearmente independentes, para todos  $(x, y)$ .

Diremos que (5.2) é um **sistema estritamente hiperbólico** se, além de ser hiperbólico, os autovalores são distintos.

Se o sistema é hiperbólico então, a equação  $\det(A(\xi(y), y)\xi'(y) - B(\xi(y), y))$  gera  $N$  EDOs na forma

$$\xi'_i(y) = \lambda_i(\xi_i(y), y), \quad (5.4)$$

que permitirão determinar  $N$  famílias de curvas características; além disso, podemos construir duas matrizes:  $\Gamma(x, y)$ , contendo os autovetores (logo invertível), e  $\Lambda(x, y)$ , diagonal, contendo os autovalores: isto é, vale  $\tilde{B}\Gamma = \Gamma\Lambda$ .

Podemos então mudar de incógnita em (5.3) pondo  $V = \Gamma W$  e obtendo

$$(\Gamma W)_y + \tilde{B}(\Gamma W)_x = \tilde{C}(\Gamma W) + \tilde{D}, \quad (5.5)$$

logo

$$\Gamma W_y + \tilde{B}\Gamma W_x = -\Gamma_y W - \tilde{B}\Gamma_x W + \tilde{C}\Gamma W + \tilde{D}; \quad (5.6)$$

substituindo  $\tilde{B}\Gamma$  por  $\Gamma\Lambda$ , multiplicando por  $\Gamma^{-1}$  e re-agrupando os termos da direita chegamos ao novo sistema na forma

$$\begin{aligned} W_y + \Lambda W_x &= -\Gamma^{-1}\Gamma_y W - \Gamma^{-1}\tilde{B}\Gamma_x W + \Gamma^{-1}\tilde{C}\Gamma W + \Gamma^{-1}\tilde{D} = \\ &= \hat{C}W + \hat{D} \end{aligned} \quad (5.7)$$

com a condição inicial

$$W(x, 0) = \Gamma^{-1}(x, 0)\Phi(x) = \hat{\Phi}(x).$$

O sistema (5.7) é ainda acoplado, mas desacoplou a parte com as derivadas: cada equação é da forma

$$(w_i)_y + \lambda_i(w_i)_x = \left( \sum_{j=1}^N \widehat{c}_{i,j} w_j \right) + \widehat{d}_i, \quad w_i(x, 0) = \widehat{\phi}_i(x), \quad (5.8)$$

isto é, o problema foi reduzido a  $N$  problemas escalares lineares, que podem ser resolvidos como no capítulo 2, apenas com a dificuldade de ter os lados direitos das equações acoplados. Precisarás então calcular as  $N$  famílias de características das equações (5.8), que correspondem às (5.4), e resolver um sistema de  $N$  EDOs que expressam a evolução da novas incógnitas  $w_i$  ao longo dessas características:

$$\frac{d}{dt}[w_i(\xi_i(t), t)] = \left( \sum_{j=1}^N \widehat{c}_{i,j}(\xi_i(t), t) w_j(\xi_i(t), t) \right) + \widehat{d}_i(\xi_i(t), t). \quad (5.9)$$

**Observação 5.2.** Observe que (5.4-5.8) é um sistema de equações ordinárias análogo ao sistema característico do capítulo 2, que leva à solução do problema (5.2).  $\triangleleft$

**Observação 5.3.** Mesmo no caso que não consigamos integrar o sistema final, podemos obter informações qualitativas importantes: a solução num ponto  $(x, y)$  pode ser calculada resolvendo as EDOs que regulam a evolução das  $w_i$  ao longo das  $N$  características que passam por  $(x, y)$ . No caso mais simples em que a matriz  $\widehat{C}$  é diagonal isso implica que a solução em  $(x, y)$  depende apenas do dato  $\Phi$  nos pontos  $(x_i, 0) \in S = \{y = 0\}$  dos quais saem tais características. No caso geral, as EDOs (5.9) envolvem as outras componentes do vetor  $W$ , assim também os outros pontos de  $S$  que estão entre os  $x_i$  influenciarão a solução, mas não os que estão fora do segmento determinado pelos  $x_i$ .

Isso significa que será possível delimitar *regiões de influência* e *domínios de dependência* com feito no capítulo 2 para o sistema e por consequência para equação da qual foi deduzido.  $\triangleleft$

**Observação 5.4.** Esse método pode ser aplicado a qualquer equação linear de qualquer ordem, desde que o sistema resultante seja hiperbólico, permitindo definir o conceito de hiperbolicidade para equações de ordem maior que dois.

O caso em mais de duas variáveis também pode ser enfrentado com técnicas deste tipo, mas o estudo do sistema resultante será bem mais complicado.  $\triangleleft$

**Observação 5.5.** Dos resultados obtidos nesta seção, podemos entender claramente por que (pelo menos no caso linear) a classificação das equações é baseada apenas nos termos de grau máximo: como as matrizes  $\Gamma$  e  $\Lambda$  dependem apenas de  $A$  e  $B$ , que são os coeficientes dos termos de grau máximo, uma vez fixada esta parte podemos calcular as curvas características das (5.8) e saber quais são as incógnitas  $w_i$ , isto é, a estrutura do problema (ao longo de quais curvas passam quais informações) depende apenas destes termos. O que falta para resolver o problema é apenas resolver o sistema das EDOs (5.9), o que é apenas um problema de cálculo (ou de integração numérica).

Até no caso semilinear (quando o termo  $CV + D$  em (5.2) é substituído por uma função qualquer de  $V$ ) podemos proceder da mesma maneira e a única diferença será uma maior dificuldade para integrar o sistema das (5.9).  $\triangleleft$

**Observação 5.6.** Observe que no caso do sistema (5.1), associado à equação (4.1), a matriz  $\widetilde{B}$  seria

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & a/c & 2b/c \end{bmatrix}$$

(devemos assumir  $c \neq 0$  para o problema ser não-característico), logo os autovalores seriam  $0, (b \pm \sqrt{\Delta})/c$ : a condição de hiperbolicidade seria  $\Delta > 0$ , análoga à condição da definição 4.2. Deixamos como exercício verificar que, de fato, se  $\Delta = 0$  não existirão três autovetores independentes (caso parabólico), enquanto mesmo que outro autovalor seja nulo, haverão ainda três autovetores independentes, (caso de sistema hiperbólico mas não estritamente).

Observe também que, no caso de uma equação de segunda ordem totalmente não linear, podemos sempre escrever o sistema associado como na seção 1.4.1; verifique que também neste caso a condição de hiperbolicidade coincide com a enunciada na seção 4.3.  $\triangleleft$

**Observação 5.7** (O caso quasilinear). No caso quasilinear é possível fazer uma redução a sistema parecida, a diferença é que as matrizes  $A$  e  $B$  (e logo  $\Gamma$  e  $\Lambda$ ) dependerão da solução, assim tanto as equações para as características quanto a mudança de incógnitas que desacopla o sistema dependerão da solução, de maneira que tudo deverá ser resolvido contemporaneamente.

*Exemplo 5.8.* Considere o problema de Cauchy para a equação da onda semilinear

$$\begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = F(x, y, u), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_y(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (5.10)$$

O sistema correspondente será

$$\begin{cases} u_y = q, & u(x, 0) = \phi(x), \\ p_y - q_x = 0, & p(x, 0) = \phi'(x), \\ q_y - p_x = F(x, y, u), & q(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (5.11)$$

que corresponde às matrizes  $A = Id$  e  $B = \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Calculando autovalores e autovetores obtemos

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

deduzimos que as incógnitas certas são  $u$ ,  $s := p + q$ ,  $d := p - q$ , dando o sistema

$$\begin{cases} u_y = (s - d)/2, & u(x, 0) = \phi(x), \\ s_y - s_x = F(x, y, u), & s(x, 0) = \phi'(x) + \psi(x), \\ d_y + d_x = -F(x, y, u), & d(x, 0) = \phi'(x) - \psi(x); \end{cases} \quad (5.12)$$

agora é possível integrar o sistema: no caso  $F = 0$  teremos  $s(x, y) = s(x + y, 0)$ ,  $d(x, y) = d(x - y, 0)$  e

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x, 0) + \frac{1}{2} \int_0^y [s(x, t) - d(x, t)] dt \\ &= u(x, 0) + \frac{1}{2} \int_0^y [s(x + t, 0) - d(x - t, 0)] dt \\ &= \phi(x) + \frac{1}{2} \int_0^y [\phi'(x + t) + \psi(x + t) - \phi'(x - t) + \psi(x - t)] dt \\ &= \phi(x) + \frac{1}{2} \left( \int_0^y [\phi'(x + t) - \phi'(x - t)] dt + \int_0^y [\psi(x + t) + \psi(x - t)] dt \right) \\ &= \phi(x) + \frac{1}{2} \left( \phi(x + y) + \phi(x - y) - 2\phi(x) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \phi(x + y) + \phi(x - y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Observe que, como comentamos acima, a solução em  $(x, y)$  depende apenas dos dados entre os pés das três características que passam por  $(x, y)$ , isto é, no segmento  $[x - y, x + y]$ .

Veremos que as informações qualitativas (curvas características, domínio de dependência, etc..) e a solução obtida correspondem à que obteremos na seção 6.4. ★

*Exercício 5.9.* Completar a integração do sistema (5.12) no caso com  $F$  na forma  $F(x, y)$ . Confrontar com o resultado da seção 6.4. ★

## 5.2 Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos.

Nesta seção consideraremos uma curva  $\gamma$  de equação  $x = \xi(y)$  que divide o conjunto  $\Omega$  em duas regiões  $\Omega_l$  e  $\Omega_r$  e usaremos a notação introduzida na definição 3.5 na página 53.

**Lema 5.10.** *Dada uma função  $z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que seja contínua em  $\Omega$  e de classe  $\mathcal{C}^1$  tanto em  $\overline{\Omega_l}$  como em  $\overline{\Omega_r}$ , vale*

$$[[z_x]](\xi(y), y) \xi'(y) + [[z_y]](\xi(y), y) = [[z_x]] \xi' + [[z_y]] = 0 \quad (5.13)$$

ao longo de  $\gamma$ .

*Demonstração.* Sejam  $z_{l,r} := z|_{\overline{\Omega_{l,r}}}$  as restrições de  $z$  aos dois conjuntos  $\overline{\Omega_{l,r}}$ . Pela continuidade de  $z$  temos  $z_r(\xi(y), y) - z_l(\xi(y), y) = [[z]](\xi(y), y) = 0$ ; como por hipótese as duas funções são deriváveis até a curva  $\gamma$ , podemos derivar esta identidade obtendo

$$((z_r)_x \xi' + (z_r)_y) - ((z_l)_x \xi' + (z_l)_y) = ((z_r)_x - (z_l)_x) \xi' + ((z_r)_y - (z_l)_y) = [[z_x]] \xi' + [[z_y]] = 0.$$

□

Consideremos agora a equação linear de ordem dois

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad (5.14)$$

onde os coeficientes dependem apenas de  $(x, y)$  e são contínuos.

Seja  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$  e  $u_l$  e  $u_r$  suas restrições a  $\Omega_l$  e  $\Omega_r$ , respectivamente. Suponhamos que  $u_l$  e  $u_r$  sejam soluções de (5.14) e tais que suas derivadas até a ordem dois possam ser prolongadas até  $\gamma$ . Como  $u$  é  $\mathcal{C}^1(\Omega)$  temos que  $[[u]] = [[u_x]] = [[u_y]] = 0$  sobre  $\gamma$ .

Subtraindo a equação (5.14) calculada dos dois lados de  $\gamma$  obtemos (lembrando que os coeficientes são contínuos)  $a[[u_{xx}]] + 2b[[u_{xy}]] + c[[u_{yy}]] = 0$ .

Juntando esta equação às obtidas aplicando o lema 5.10 às quantidades  $u_x$  e  $u_y$  obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a[[u_{xx}]] + 2b[[u_{xy}]] + c[[u_{yy}]] = 0 \\ \xi'[[u_{xx}]] + [[u_{xy}]] = 0 \\ \xi'[[u_{xy}]] + [[u_{yy}]] = 0 \end{cases}, \quad (5.15)$$

cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \xi' & 1 & 0 \\ 0 & \xi' & 1 \end{vmatrix} = a - 2b\xi' + c(\xi')^2;$$

isso significa que  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$  também serão contínuas (saltos nulos) a menos que este determinante seja zero.

Deduzimos que pode ter um salto entre as derivadas segundas das duas soluções só se  $\xi'$  anula o determinante: se  $L$  é hiperbólico isto significa que  $\gamma$  é curva característica, de fato, a normal a  $\gamma$  é  $(-1, \xi')$  e  $\chi(-1, \xi') = a(-1)^2 + 2b(-1)\xi' + c(\xi')^2$ . No caso da equação ser elíptica não poderá ter descontinuidade.

Juntando as últimas duas equações do sistema (5.15) podemos também ver que os saltos nas derivadas segundas não serão independentes mas deverão satisfazer a condição

$$\llbracket u_{yy} \rrbracket = - \llbracket u_{xy} \rrbracket \xi' = \llbracket u_{xx} \rrbracket (\xi')^2. \quad (5.16)$$

Esta relação simplesmente afirma o fato óbvio que só pode ter salto na derivada segunda normal a  $\gamma$ , pois a continuidade de  $u$ ,  $u_x$  e  $u_y$  implica que também serão contínuas suas derivadas tangenciais.

**Observação 5.11.** Mais uma vez o que obtivemos foi que os dados (neste caso função e derivada, já que o operador é de ordem dois) ao longo de uma curva característica não são suficientes para determinar a derivada de ordem máximo na direção normal.

**Observação 5.12.** Observe que quanto feito até aqui não diz respeito a soluções clássicas de (5.14) em  $\Omega$ , já que não estamos pedindo que as derivadas segundas de  $u$  existam ao longo de  $\gamma$  (apenas seus limites dos dois lados), o que obtivemos foi uma condição necessária que deve ser satisfeita quando dos dois lados da curva  $\gamma$  há soluções da equação, mesmo sem pedirmos nada ao longo da curva.

**Observação 5.13.** A condição de salto (5.16) afirma que a intensidade do salto num ponto pode ser expressa por uma única quantidade real, já que as três componentes dependem uma da outra. É possível também obter uma equação que regula a evolução desta intensidade ao longo de  $\gamma$  (veja [JN] pag 37).

Repetindo as contas acima, podemos considerar o caso de uma solução (clássica) em  $\mathcal{C}^2(\Omega)$  de (5.14), que seja de classe  $\mathcal{C}^3$  em  $\Omega_l$  e  $\Omega_r$  e tenha salto nas derivadas terceiras ao longo de  $\gamma$ , supondo agora também que os coeficientes da equação sejam de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Derivando a equação obtemos  $au_{xxx} + 2bu_{xxy} + cu_{xyy} + \dots = 0$ , onde no lugar dos pontos teremos termos de grau menor, incluindo também os que saem da derivação dos coeficientes. Como as derivadas até as primeiras dos coeficientes e as até as segundas da  $u$  são contínuas, fazendo a diferença entre os dois lados de  $\gamma$  obtemos  $a \llbracket u_{xxx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xxy} \rrbracket + c \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0$ ; do lema 5.10 aplicado às derivadas segundas obtemos relações entre os saltos, chegando ao sistema

$$\begin{cases} a \llbracket u_{xxx} \rrbracket + 2b \llbracket u_{xxy} \rrbracket + c \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xxx} \rrbracket + \llbracket u_{xxy} \rrbracket = 0 \\ \xi' \llbracket u_{xxy} \rrbracket + \llbracket u_{xyy} \rrbracket = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$



análogo ao (5.15), mostrando que também um salto nas derivadas terceiras de uma solução  $\mathcal{C}^2$  só é possível ao longo de uma curva característica e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal (observe que  $\llbracket u_{yyy} \rrbracket$  não aparece no sistema mas também depende dos outros saltos:  $\llbracket u_{xyy} \rrbracket \xi' + \llbracket u_{yyy} \rrbracket = 0$ ).

Generalizando podemos afirmar o seguinte:

**Proposição 5.14.** *Seja  $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  ( $k \geq 2$ ) uma solução de (5.14) e  $u_l, u_r$  suas restrições a  $\Omega_l$  e  $\Omega_r$ , respectivamente. Suponhamos que  $u_l$  e  $u_r$  sejam de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$  e suas derivadas até a ordem  $k+1$  possam ser prolongadas até  $\gamma$ . Suponhamos também que os coeficientes da equação sejam de classe  $\mathcal{C}^{k-1}$ .*

*Então um salto na derivada  $k+1$ -ésima de  $u$  só é possível ao longo de uma curva característica e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal.*

**Observação 5.15.** No caso de uma equação quasilinear (na qual então os coeficientes de  $L$  dependem de  $u$  e  $\nabla u$ ) ainda podemos pensar da seguinte maneira: uma solução da equação pode sempre ser vista como uma solução de uma equação linear  $\tilde{L}u = \tilde{g}$  cujos coeficientes sejam os obtidos substituindo  $u$  e  $\nabla u$  nos coeficientes de (5.14).

Logo, eventuais descontinuidades nas derivadas segundas poderão estar apenas ao longo das curvas características de  $\tilde{L}$ , isto é das curvas características de (5.14) em correspondência da solução  $u$  (observe que se os coeficientes de  $L$  são contínuos e  $u$  é  $\mathcal{C}^1$  então os coeficientes de  $\tilde{L}$  também resultarão contínuos).

Analogamente podemos fazer com descontinuidades em derivadas de ordem maior.

### 5.3 Estudo de equações hiperbólicas em forma canônica.

Nesta seção veremos mais uma técnica para estudar equações de segunda ordem hiperbólicas, limitando-nos ao caso em duas variáveis.

Já vimos na seção 4.1.1 que todo problema de Cauchy para uma equação semilinear de segunda ordem hiperbólica em duas variáveis pode ser transformado na forma canônica

$$\begin{cases} u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \\ u = w_0, \quad u_\nu = w_1 \quad \text{em } S, \end{cases} \quad (5.18)$$

onde a condição de não-caracteristicidade para o problema escrito nesta forma é que a curva  $S$  nunca tenha normal horizontal nem vertical. Lembre que mesmo se na equação original não aparecem os termos de ordem um, estes podem aparecer depois da mudança de variável, logo será importante tratar o caso no qual  $F$  depende deles.

Como sempre indicaremos por  $p = u_x$  e  $q = u_y$ . A condição de não-caracteristicidade implica que podemos parametrizar  $S$  tanto dando  $x$  em função de  $y$  quanto dando  $y$  em função de  $x$ : as condições iniciais serão então numa das duas formas a seguir:

$$\begin{cases} x = \xi(y), \\ u = \phi_0(y), \\ q = \phi_1(y), \end{cases} \quad \begin{cases} y = \eta(x), \\ u = \psi_0(x), \\ p = \psi_1(x), \end{cases} \quad (5.19)$$

onde, pela condição de não-caracteristicidade,  $\xi$  e  $\eta$  são estritamente monótonas e é equivalente impor  $q$ ,  $p$ , ou  $u_\nu$ , de fato, teremos as relações

$$\phi_0(y) = \psi_0(\xi(y)),$$

$$\phi'_0(y) = \frac{d}{dy}[u(\xi(y), y)] = u_x(\xi(y), y) \xi'(y) + u_y(\xi(y), y) = \psi_1(\xi(y)) \xi'(y) + \phi_1(y),$$

da qual obtemos

$$\phi_1(y) = \phi'_0(y) - \psi_1(\xi(y))\xi'(y).$$

Consideraremos paralelamente estas duas formas equivalentes de pôr a condição.

No caso  $F = 0$  sabemos que a solução é da forma  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  (veja no exemplo 1.5), da qual obtemos

$$\begin{cases} p(x, y) = f'(x), \\ q(x, y) = g'(y), \end{cases} \quad (5.20)$$

que nos diz que na verdade  $p$  depende apenas de  $x$  e  $q$  apenas de  $y$ , logo obtemos da condição de Cauchy

$$\begin{cases} p(x, y) = f'(x) = \psi_1(x) \\ q(x, y) = g'(y) = \phi_1(y). \end{cases} \quad (5.21)$$

Fixado então um ponto  $X = (x, y) \notin S$ , podemos obter  $f$  integrando ao longo do segmento horizontal que conecta  $(x, y)$  com  $P = (x_0, y) = (\xi(y), y) \in S$  e  $g$  integrando ao longo do segmento vertical que conecta  $(x, y)$  com  $Q = (x, y_0) = (x, \eta(x)) \in S$ , isto é,

$$\begin{cases} f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \psi_1 = f(\xi(y)) + \int_{\xi(y)}^x \psi_1, \\ g(y) = g(y_0) + \int_{y_0}^y \phi_1 = g(\eta(x)) + \int_{\eta(x)}^y \phi_1; \end{cases} \quad (5.22)$$

como não conhecemos  $f$  e  $g$  em  $S$  mas apenas sua soma, calculamos

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(2f(x) + 2g(y)) = \frac{1}{2} \left( f(x) + g(y) + f(x_0) + \int_{x_0}^x \psi_1 + g(y_0) + \int_{y_0}^y \phi_1 \right). \quad (5.23)$$

Chamando  $\gamma$  o trecho (orientado) da curva  $S$  que vai de  $P$  a  $Q$ , podemos escrever (5.23) na forma

$$u(X) = \frac{1}{2} \left( u(P) + u(Q) + \int_{\gamma} (pdx - qdy) \right). \quad (5.24)$$

Consideremos agora o caso  $F = F(x, y)$ : como o problema é linear podemos procurar a solução com dado nulo em  $S$  e em seguida sobrepô-la à solução (5.24). Integrando ao longo do segmento  $QX$  temos

$$u(x, y) = u(x, y_0) + \int_{y_0}^y u_y(x, s) ds = \int_{y_0}^y u_y(x, s) ds \quad (5.25)$$

onde, integrando em segmentos horizontais entre  $S$  e  $(x, s)$

$$u_y(x, s) = u_y(\xi(s), s) + \int_{\xi(s)}^x u_{xy}(t, s) dt = \int_{\xi(s)}^x F(t, s) dt. \quad (5.26)$$

Juntando (5.25) e (5.26) obtemos

$$u(x, y) = \int_{\eta(x)}^y ds \int_{\xi(s)}^x F(t, s) dt = \pm \int_T F dT \quad (5.27)$$

onde por  $T$  indicamos o triângulo curvilíneo delimitado por  $XP$ ,  $XQ$  e  $S$ : o sinal depende de como a integral dupla transforma na integral iterada: se  $S$  é uma curva decrescente então  $\eta(x) < y$  e  $\xi(s) < x$  e o sinal certo é  $+$ , se for crescente deverá ser pego o sinal  $-$ .

A solução completa de (5.18) quando  $F = F(x, y)$  será então

$$u(X) = \frac{1}{2} \left( u(P) + u(Q) + \int_{\gamma} (pdx - qdy) \right) \pm \int_T F dT. \quad (5.28)$$

Consideremos enfim o caso semilinear  $F = F(x, y, u, p, q)$ : neste caso (5.28) pode ser usada para obter uma equação integro-diferencial implícita que a solução deve satisfazer, de fato, se  $u$  é solução de (5.18) então será solução do problema linear obtido substituindo  $u$  nos coeficientes, isto é, deve satisfazer

$$u(X) = \frac{1}{2} \left( u(P) + u(Q) + \int_{\gamma} (pdx - qdy) \right) \pm \int_T F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy. \quad (5.29)$$

Podemos então usar (5.29) para obter uma solução de (5.18) usando algum método iterativo ou de ponto fixo (veja [GB] página 110 e seguintes).

Mesmo sem calcular a solução, podemos obter de (5.29) várias informações sobre as soluções de (5.18): a solução  $u(x, y)$  depende apenas do dado para  $u$  nos pontos  $P, Q$ , do dado para  $u_{\nu}$  no trecho de  $S$  entre  $P$  e  $Q$ , e de  $F, u, u_x, u_y$  (se aparecerem na equação) no triângulo curvilíneo  $T$ : tudo o resto não pode influenciar a solução em  $(x, y)$ . Temos então uma representação clara do domínio de dependência e da região de influencia.

Se (5.18) é a forma canônica de uma equação semilinear mais geral, então  $x$  e  $y$  são as coordenadas características, logo estas propriedades de dependência podem ser traduzidas nas variáveis originais  $\hat{x}, \hat{y}$  afirmando que a solução num ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$  depende apenas dos dados no trecho de  $S$  que está entre as duas características que passam pelo ponto  $(\hat{x}, \hat{y})$ , e dos outros coeficientes no triângulo curvilíneo que elas determinam junto com  $S$ .

Até no caso quasilinear, considerando como sempre o problema linear obtido substituindo  $u$  nos coeficientes, podemos obter domínio de dependência e região de influencia (associados a uma certa solução) construindo as curvas características que passam por  $(\hat{x}, \hat{y})$  e delimitando o trecho de  $S$  e o triângulo curvilíneo  $T$  como acima.

*Exercício 5.16.* Use (5.28) para re-obter a solução do problema da onda (5.10) com  $F = F(x, y)$ , depois de ter posto o problema na forma (5.18) mudando para as variáveis características. De novo, confronte com o resultado da seção 6.4. ★

## Bibliografia do capítulo

- Seção 5.1:  
principal: [JN] páginas 46...48;  
veja também: [CH] páginas 424...427;

- Seção 5.2:  
principal: [JN] páginas 35...37;  
veja também: [CH] páginas 416...418;
- Seção 5.3:  
[GB] paginas 101...106.

# Capítulo 6

## Equação da onda

### 6.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a equação da onda

$$\square u := u_{tt} - \Delta_x u = F(x, t) \quad (6.1)$$

onde  $u = u(x, t)$  e  $x$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$ : geralmente interpretamos  $t$  como o tempo e diremos então que (6.1) é a equação da onda em dimensão (espacial)  $n$ . O operador  $\square$  é dito **operador de D'Alambert**.

Quando não especificado, assumiremos os operadores  $\nabla$ ,  $\Delta$  e  $div$  agindo apenas nas variáveis  $x \in \mathbb{R}^n$ ; indicaremos também por  $B_R(x)$  a bola aberta em  $\mathbb{R}^n$  de raio  $R$  e centro  $x$ .

Como vimos no capítulo 4, a equação (6.1) é sempre (normalmente) hiperbólica; consideraremos em geral um problema de Cauchy da forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (6.2)$$

Um modelo físico que esta equação representa é o de um corpo elástico em  $\mathbb{R}^n$  que vibra: se  $n = 1$  representará uma corda, se  $n = 2$  uma membrana e se  $n = 3$  um sólido. Também o caso  $n = 2$  pode representar ondas que propagam na superfície de um líquido e o caso  $n = 3$  a vibração do ar (som) ou do campo eletromagnético (luz ou ondas eletromagnéticas).

Vejamos como chegamos a (6.1) modelando um corpo elástico em dimensão um: considere um corpo unidimensional (por exemplo uma varinha de metal); se  $u(x, t)$  representa o deslocamento (na direção do eixo do corpo) no instante  $t$  de uma partícula que a repouso estaria no ponto  $x$ , fixada uma porção  $[a, b]$  do corpo,

- o momento linear desta porção será  $\int_a^b \rho(x) u_t(x, t) dx$ , onde  $\rho$  é a densidade de massa;
- se  $T$  é a tração que age nos extremos  $a$  e  $b$  então a força resultante será  $T(b, t) - T(a, t)$ ;
- se  $F$  é uma força de volume que age sobre o corpo então a força resultante aplicada a  $[a, b]$  será  $\int_a^b F(x, t) dx$ .

Aplicando o teorema do momento linear, temos

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \rho(x) u_t(x, t) dx = \int_a^b \rho(x) u_{tt}(x, t) dx = T(b, t) - T(a, t) + \int_a^b F(x, t) dx$$

e usando o teorema fundamental do cálculo  $T(b, t) - T(a, t) = \int_a^b T_x(x, t) dx$  obtemos

$$\int_a^b [\rho u_{tt} - T_x - F] dV = 0.$$

Como isso vale para toda porção  $[a, b]$  do corpo chegamos à equação

$$\rho u_{tt} - T_x = F. \quad (6.3)$$

Enfim, a lei constitutiva que liga a deformação com os esforços trocados entre duas porções contíguas de material é do tipo  $T = k u_x$  (esticando a varinha ( $u_x > 0$ ) teremos tração positiva, isto é, uma força na direção que sai do corpo).

Inserindo isso em (6.3) obtemos

$$\rho u_{tt} - k u_{xx} = F;$$

re-escalando é sempre possível pôr a equação na forma (6.1).

Podemos chegar à mesma equação também considerando as vibrações transversais de uma corda esticada ou de uma membrana, mas apenas quando tais vibrações são suficientemente pequenas para podermos descartar termos não lineares de ordem menor.

As condições de Cauchy que aparecem em (6.2) representam então velocidade e posição de cada ponto no instante  $t = 0$ .

As equações dos campos elétrico e magnético no vácuo podem ser obtidas diretamente das equações de Maxwell: estas são, no vácuo (isto é, quando não tem carga elétrica nem correntes)

$$\operatorname{div}(E) = 0 \quad \operatorname{div}(B) = 0 \quad (6.4)$$

$$\operatorname{rot}(E) = -B_t \quad \operatorname{rot}(B) = E_t/c^2, \quad (6.5)$$

onde  $E$  é o campo elétrico,  $B$  o campo magnético e  $c$  a velocidade da luz.

Obtemos então  $E_{tt} = c^2(\operatorname{rot}(B_t)) = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(E_t)) = \Delta E + \nabla(\operatorname{div}(E)) = \Delta E$ .

**Observação 6.1.** Fazendo a troca de variável  $t \mapsto -t$  em (6.2) a equação continua a mesma e apenas muda o sinal de  $\psi$ . Por isso podemos estudar o problema (6.2) apenas para  $t \geq 0$ , pois o comportamento para  $t \leq 0$  será análogo.

Fisicamente este fato significa que o tempo é reversível para os fenômenos descritos pela equação da onda: conhecendo  $u$  e  $u_t$  para  $t = 0$  os problemas de calcular o estado futuro e o estado passado são análogos.  $\triangleleft$

## 6.2 Condição de não-caracteristicidade e boa posição

Como vimos no exemplo 1.15,  $\operatorname{char}(\square) = \{(x, t) \neq (0, 0) : t^2 = |x|^2\}$  é composta por dois cones de vértice a origem e eixo a reta  $\{x = 0\}$ ; o cone com  $t > 0$  e o com  $t < 0$  são chamados, respectivamente **cone de luz do futuro** e **cone de luz do passado**, pois como veremos os pontos dentro do cone de luz do passado são os únicos que podem influenciar o ponto no vértice do cone, enquanto os pontos dentro do cone de luz do futuro são os únicos que podem ser influenciados pelo ponto no vértice.

O típico problema físico para a equação da onda será o problema (6.2), isto é, fixar  $u$  e  $u_t$  em  $S = \{t = 0\}$ . Então será sempre um problema de Cauchy não-característico.

Do ponto de vista matemático, porém, também seriam problemas de Cauchy não-característicos os que fixam  $u$  e  $u_\nu$  em qualquer hiperplano (ou hipersuperfície) que não tenha normal em  $\text{char}(\square)$ , como por exemplo  $S^* = \{(0, x_2, \dots, x_n, t)\}$ .

Se  $n = 1$  realmente a equação com dado posto na superfície  $\{(0, t)\}$  é equivalente ao (6.2), pois trocando  $x$  e  $t$  a equação não muda.

Se  $n > 1$  as coisas mudam, como sugere o fato que a posição relativa de  $S$  e  $S^*$  com respeito a  $\text{char}(\square)$  é bem diferente:  $S$  separa o cone do passado do cone do futuro enquanto  $S^*$  corta ambos no meio.

Outra diferença é a seguinte: se consideramos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0, \\ u(0, y, t) = 0, \quad u_x(0, y, t) = e^{-\sqrt{n}} \sin(ny) \end{cases} \quad (6.6)$$

teremos pelo menos uma solução que não depende de  $t$  e que é a solução  $e^{-\sqrt{n}} \sin(ny) \text{Sh}(nx)/n$  da equação elíptica  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  que vimos no exercício 1.6, mostrando que para 6.6 não pode haver dependência contínua dos dados.

Por outro lado, o problema com o dato  $u(x, y, 0) = 0$ ,  $u_t(x, y, 0) = e^{-\sqrt{n}} \sin(ny)$  dará uma solução (que veremos ser única) que não depende de  $x$  (logo é solução também da equação da onda  $u_{tt} - u_{yy} = 0$ ) e, como veremos melhor a seguir, esta depende com continuidade dos dados.

Podemos chegar a um resultado mais preciso: diremos que uma superfície em  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  é **de tipo espacial** se sua normal  $\nu = (\vec{\nu}_x, \nu_t)$  satisfaz  $|\nu_t| > |\vec{\nu}_x|$ ; diremos que é **de tipo temporal** se  $|\nu_t| < |\vec{\nu}_x|$ . Geometricamente as superfícies de tipo temporal cortam os cones de  $\text{char}(\square)$ , enquanto as de tipo espacial apenas dividem o cone do futuro do cone do passado. Observe que uma superfície regular não característica pertence necessariamente a um dos dois tipos, já que para passar de  $|\nu_t| > |\vec{\nu}_x|$  a  $|\nu_t| < |\vec{\nu}_x|$  precisaria ter um ponto de caracteristicidade (consequência do fato que a variedade característica define pelo menos 3 conjuntos desconexos no espaço das direções em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

**Proposição 6.2.** *Dado o vetor não nulo  $(\mathbf{b}, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  existe  $(\mathbf{a}, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que*

$$u(x, t) = \sin(n(\mathbf{a} \cdot x + \sigma t)) \text{Sh}(n(\mathbf{b} \cdot x + \tau t)) \quad (6.7)$$

satisfaz  $\square u = 0$ , se e só se

- $n = 1$  e  $b = \pm\tau$  ou
- $n > 1$  e  $|\tau| \leq |b|$ .

Em consequência da existência deste tipo de soluções (onde a solução dispara na direção do vetor  $(\mathbf{b}, \tau)$  mesmo sendo pequena no hiperplano de tipo temporal  $\{\mathbf{b} \cdot x + \tau t = 0\}$ , ortogonal a  $(\mathbf{b}, \tau)$ ), os problemas de Cauchy em hiperplanos de tipo temporal são sempre mal postos.

*Demonstração da proposição 6.2.* Derivando (6.7) obtemos

$$\begin{cases} u_{tt} = n^2 [(-\sigma^2 + \tau^2) \sin(\cdot) \sinh(\times) + 2\sigma\tau \cos(\cdot) \cosh(\times)], \\ \Delta_x u = n^2 [(-|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2) \sin(\cdot) \sinh(\times) + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cos(\cdot) \cosh(\times)], \end{cases}$$

logo para que (6.7) seja solução de  $\square u = 0$  é necessário que

$$\begin{cases} |\mathbf{a}|^2 - \sigma^2 = |\mathbf{b}|^2 - \tau^2, \\ \sigma\tau = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \end{cases}$$

Se  $n = 1$  isso equivale a  $(a + ib)^2 = (\sigma + i\tau)^2$  logo  $(a + ib) = \pm(\sigma + i\tau)$  implicando  $b = \pm\tau$ .

Se  $n > 1$  e  $\tau = 0$  então a escolha  $\sigma = 0$  e  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  com  $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| \neq 0$  nos dá uma solução do tipo procurado.

Se  $n > 1$  e  $\tau \neq 0$  escolhendo  $\sigma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/\tau$  obtemos

$$|\mathbf{b}|^2 - \tau^2 = |\mathbf{a}|^2 - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\tau^2} \geq |\mathbf{a}|^2 - \frac{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2}{\tau^2} = \frac{|\mathbf{a}|^2}{\tau^2} (\tau^2 - |\mathbf{b}|^2) :$$

isso mostra que  $\tau^2 \leq |\mathbf{b}|^2$  é de fato necessário. Também é suficiente pois podemos pôr  $\sigma = 1$  e  $\mathbf{a}$  tal que

$$\begin{cases} |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - \tau^2 + 1, & \text{possível pois é positivo,} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \tau, & \text{possível pois } \frac{|\tau|}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{|\tau|}{|\mathbf{b}|\sqrt{|\mathbf{b}|^2 - \tau^2 + 1}} \leq 1. \end{cases}$$

□

### 6.3 Unicidade

Nesta seção veremos o seguinte teorema, que implica na unicidade da solução do problema (6.2)

**Teorema 6.3.** *Se  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  ( $n \geq 1$ ) e satisfaz*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 & \text{em } \overline{B_R(x_0)} \end{cases} \quad (6.8)$$

com  $R \leq T$ , então  $u \equiv 0$  em  $C := \{(x, t) : 0 \leq t \leq R, |x - x_0| \leq R - t\}$  (cone do passado do ponto  $(x_0, R)$ ).

*Demonstração.* Seja

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{B_{R-t}(x_0)} [u_t^2(\cdot, t) + |\nabla u(\cdot, t)|^2] :$$

esta é a “energia” associada à solução na bola  $B_{R-t}(x_0)$  no instante  $t$ . Está bem definida já que  $B$  é limitada e a solução é  $\mathcal{C}^2$ .

Calculemos

$$\frac{d}{dt} E = \frac{2}{2} \int_{B_{R-t}(x_0)} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} [u_t^2 + |\nabla u|^2] , \quad (6.9)$$

onde o último termo nasce do fato que o domínio de integração diminui com  $t$  (veja a equação (6.11)).



Integrando por partes, isto é, usando o fato que  $\operatorname{div}(u_t \nabla u) = u_t \Delta u + \nabla u_t \cdot \nabla u$  e depois aplicando o teorema da divergência, obtemos

$$\int_{B_{R-t}(x_0)} u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t = \int_{B_{R-t}(x_0)} u_t (u_{tt} - \Delta u) + \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t \nabla u \cdot n.$$

Estimando o termo de borda com  $|u_t \nabla u \cdot n| \leq |u_t| |\nabla u| \leq \frac{1}{2}(|u_t|^2 + |\nabla u|^2)$  vemos que, junto com o termo de borda em (6.9), dá uma contribuição não positiva, logo

$$\frac{d}{dt} E = \int_{B_{R-t}(x_0)} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=0} + \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t \nabla u \cdot n - \frac{1}{2} \int_{\partial B_{R-t}(x_0)} u_t^2 + |\nabla u|^2 \leq 0. \quad (6.10)$$

Como  $E$  é uma quantidade não negativa por definição e  $E(0) = 0$  pela condição inicial, deduzimos de (6.10) que  $E(t) \equiv 0$ , logo  $u_t, \nabla u \equiv 0$  e  $u$  é constante em  $C$ ; enfim, esta constante é 0 usando de novo a condição inicial.

A conta que usamos para obter (6.9) é a seguinte:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{B_{g(t)}} f dV \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^{g(t)} d\tau \int_{\partial B_\tau} f dS \right) = g'(t) \int_{\partial B_{g(t)}} f dS. \quad (6.11)$$

□

**Observação 6.4.** O teorema 6.3 implica nos seguintes importantes resultados.

- O problema (6.2) possui no máximo uma **única solução**: de fato, como o problema é linear, se existissem duas soluções  $u, v$ , então  $u - v$  deveria satisfazer o problema homogêneo (6.8), logo seria nula.
- A solução de (6.2) num ponto  $(x, t)$  depende apenas dos dados  $\phi, \psi$  na bola  $B_t(x)$  e de  $F$  no cone do passado de vértice  $(x, t)$ : de fato, usando ainda a linearidade, se os dados para  $u$  e  $v$  coincidem nestas regiões então  $u - v$  deve ser zero em  $(x, t)$ , mesmo se fora do cone os dados diferem (observe que na demonstração do teorema usamos que  $F = 0$  apenas no cone, não em todo  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ ).  
Viceversa, os dados no ponto  $(x_0, 0)$  influenciam apenas o cone do futuro de vértice  $(x_0, 0)$  e  $F$  no ponto  $(x, t)$  influencia apenas o cone do futuro de vértice  $(x, t)$ .  
Com isso caracterizamos a *região de influência* e o *domínio de dependência* para a equação da onda.

Este fato significa que, nas soluções da equação da onda, **a velocidade de propagação das informações é finita** (o ponto  $x$  só pode ser influenciado pelos dados no ponto  $x_0$  depois de um certo tempo). Em particular, quando a equação esta na forma  $u_{tt} - c^2 \Delta_x u = F$ , o parâmetro  $c$  indica a velocidade máxima de propagação da informação.

- Usando o raciocínio que já usamos várias vezes, podemos estender este resultado sobre o domínio de dependência e a região de influência ao caso de uma *equação semilinear*, isto é, supondo  $F = F(x, u, \nabla u, t)$ : vendo a solução como solução da equação linear onde  $\hat{F}(x, t) = F(x, u(x, t), \nabla u(x, t), t)$  deduzimos que a solução em  $(x, t)$  depende apenas dos dados  $\phi, \psi$  na bola  $B_t(x)$  e de  $F, u, \nabla u$  no cone do passado de vértice  $(x, t)$ .

- Outra consequência da finitude da velocidade de propagação é que se  $\phi, \psi$  e  $F$  possuem *suporte compacto*, então a solução  $u(\cdot, t)$  também terá suporte compacto para todo  $t > 0$ , de fato, uma vez que  $|x|$  é suficientemente grande para que o cone do passado de vértice  $(x, t)$  não intercepte os suportes, teremos  $u(x, t) = 0$ .

Neste caso podemos definir a **energia** da solução

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [u_t^2(\cdot, t) + |\nabla u(\cdot, t)|^2],$$

pois uma vez fixado  $T > 0$ , se  $t \in [0, T]$  a integral coincide com a integral em  $B_R$  para  $R$  suficientemente grande para que a solução seja zero em  $B_R^c \times [0, T]$ , logo podemos calcular (o termo de borda será nulo)

$$\frac{d}{dt} E = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] = \int_{\mathbb{R}^n} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=F}. \quad (6.12)$$

Concluimos que se  $F = 0$  e  $\phi, \psi$  têm suporte compacto então  $E$  é uma quantidade conservada.

◁

## 6.4 A equação da onda em uma dimensão

Nesta seção consideramos (6.2) quando  $n = 1$  e com o parâmetro  $c^2$  que representa a velocidade de propagação das ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases} \quad (6.13)$$

Já vimos duas maneiras de resolver este problema nos exercícios 5.9 e 5.16.

Mostremos agora uma terceira maneira de resolver o caso homogêneo ( $F = 0$ ), baseada na fatoração do operador como  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = (\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u$ . Veremos na seção 6.8 como resolver o caso com  $F \neq 0$ .

Pondo  $v := (\partial_t - c\partial_x)u$  obtemos a equação de primeira ordem

$$\begin{cases} v_t + cv_x = 0, \\ v(x, 0) = \psi(x) - c\phi'(x), \end{cases}$$

cuja solução é  $v(x, t) = (\psi - c\phi')(x - ct) := a(x - ct)$ ; logo temos a equação de primeira ordem para  $u$

$$\begin{cases} u_t - cu_x = a(x - ct), \\ u(x, 0) = \phi(x); \end{cases}$$

resolvendo via características

$$\begin{cases} x'_s(\tau) = -c, & x_s(0) = s, & \rightarrow x = s - c\tau, \\ t'_s(\tau) = 1, & t_s(0) = 0, & \rightarrow t = \tau, \\ u'_s(\tau) = a(x - ct), & u_s(0) = \phi(s), & \rightarrow u'_s(\tau) = a(s - 2c\tau), \end{cases}$$

logo  $u_s(t) = \phi(s) + \int_0^t a(s - 2c\tau)d\tau$  dando

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \int_0^t a(x + ct - 2c\tau)d\tau = \phi(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} a(\xi)d\xi;$$

como  $a = \psi - c\phi'$  temos

$$u(x, t) = \phi(x + ct) - \phi(x + ct)/2 + \phi(x - ct)/2 + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi \quad (6.14)$$

$$= \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi. \quad (6.15)$$

Veremos na seção 6.8 uma maneira de obter o termo que provém de  $F(x, y)$ : a solução completa será então

$$u(x, t) = \frac{\phi(x + ct) + \phi(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s)d\xi; \quad (6.16)$$

esta fórmula é dita **fórmula de D´Alambert**.

**Observação 6.5.** Da fórmula de D´Alambert podemos obter várias informações.

- Para ter solução de (6.13) de classe  $\mathcal{C}^2$  os dados deverão ser pelo menos  $\phi \in \mathcal{C}^2$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^1$  e  $F \in \mathcal{C}^1$ . Analogamente, dados  $\phi \in \mathcal{C}^k$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}$  e  $F \in \mathcal{C}^{k-1}$  implicarão em solução de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 2$ ).
- A solução no ponto  $(x, t)$  depende
  - de  $\phi$  apenas nos dois pés das características por  $(x, t)$ ,
  - de  $\psi$  ao longo do segmento entre estes dois pontos,
  - de  $F$  no triângulo de vértice  $(x, t)$  que as duas características definem com a reta  $t = 0$  (cone do passado).

Observe que, com respeito ao resultado que deduzimos do teorema 6.3, temos a informação adicional que  $u(x, t)$  depende do valor de  $\phi$  apenas nos extremos do segmento e não do segmento inteiro.

- A solução com  $F = 0$  está na forma  $f(x + ct) + g(x - ct)$ , o que é coerente com a solução de  $u_{xy} = 0$  do exemplo 1.5, uma vez que as coordenadas características são  $x + ct$  e  $x - ct$ .
- Uma vez que a solução é única pelo teorema 6.3 e que temos uma fórmula explícita, podemos deduzir da fórmula a dependência contínua dos dados. Logo, para o problema de Cauchy (6.13) com  $\phi \in \mathcal{C}^2$ ,  $\psi \in \mathcal{C}^1$  e  $F \in \mathcal{C}^1$  existe uma única solução que depende com continuidade dos dados: *é um problema bem posto segundo Hadamard*.

◁

### 6.4.1 Soluções generalizadas e domínios limitados

A solução da equação da onda homogênea em dimensão um em coordenadas características  $f(z) + g(w)$  mostra uma propriedade qualitativa das soluções: fixado um “retângulo característico”  $[z_0, z] \times [w_0, w]$  vale

$$u(z, w) + u(z_0, w_0) = f(z) + g(w) + f(z_0) + g(w_0) = u(z, w_0) + u(z_0, w).$$

Traduzido nas coordenadas originais isso significa que dado um “quadrilátero característico” de vértices (consecutivos)  $A, B, C, D$ , isto é, sendo  $AB$  e  $CD$  paralelos às retas  $x = ct$  e  $BC$  e  $DA$  paralelos às retas  $x = -ct$ , teremos

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D). \quad (6.17)$$

Esta fórmula pode ser útil no estudo das soluções clássicas de (6.13), mas também permite uma definição de **solução generalizada**, de regularidade inferior, pedindo apenas que esteja satisfeita (6.17) em todo ponto.

Uma aplicação importante deste tipo de soluções generalizadas é o estudo do **problema misto** (condições iniciais e de fronteira) em um domínio limitado:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \psi(x) & \text{para } x \in [a, b], \\ u(a, t) = \alpha(t), & u(b, t) = \beta(t) & \text{para } t \geq 0. \end{cases} \quad (6.18)$$

De fato, nos pontos  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  temos um ângulo na superfície dos dados e muda o tipo de condição (observe que este não é um problema de Cauchy!), o que implica que em geral não poderemos esperar uma solução regular: teremos singularidades propagando (como vimos na seção 5.3) ao longo das características.

Podemos então calcular a solução (talvez apenas generalizada) iterativamente: primeiro calculamos a solução no triângulo de base  $[a, b] \times \{0\}$  e lados característicos, que pela velocidade finita de propagação depende apenas dos dados no segmento  $[a, b] \times \{0\}$ , via fórmula de D’Alembert. Em seguida, calculamos a solução nos triângulos laterais, pela (6.17), tomando dois pontos na região já calculada e o terceiro nas borda laterais; iterando desta maneira pode ser calculada a solução inteira.

Condições necessárias para poder ter solução  $\mathcal{C}^2$  são as relações de compatibilidade

$$\begin{cases} \alpha(0) = \phi(a), & \beta(0) = \phi(b), \\ \alpha'(0) = \psi(a), & \beta'(0) = \psi(b), \\ \alpha''(0) = \phi''(a), & \beta''(0) = \phi''(b); \end{cases} \quad (6.19)$$

nem sempre porém a condição “física” satisfaz as (6.19): uma corda fixada nos extremos satisfaria (6.18) com  $\alpha \equiv \beta \equiv 0$  e sendo  $\phi$  e  $\psi$ , respectivamente, posição e velocidade inicial da corda: as primeiras duas condições em (6.19) traduzem o fato físico do extremo ser fixado, mas as condições  $\phi''(a) = \phi''(b) = 0$  não têm porque estarem satisfeitas: quando não estiverem, a solução (generalizada) terá singularidades na derivada segunda propagando ao longo das características e refletindo contra os extremos.

*Exercício 6.6.* Resolva (6.18) com  $[a, b] = [0, \pi]$ ,  $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ ,  $\phi = \pi/2 - |x - \pi/2|$  e  $\psi = 0$  (corda picada no meio) usando (6.17). Resolva também usando série de Fourier e verifique que a série obtida converge à mesma solução. ★

## 6.5 Complementos via exercícios

**Exercício 6.7. Efeito dos termos de ordem menor na equação da onda em dimensão um**

- Considere a equação  $u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = 0$ .
  - a) Mostre que a função  $\sin(kx - \omega t)$  é solução com  $k = \pm\omega$  se e só se  $\lambda = 0$ .
  - b) Mostre que se  $\lambda \neq 0$ , a função  $\sin(kx - \omega t)$  é solução só se  $\omega = \pm\sqrt{k^2 + \lambda}$ .  
Este fenômeno se chama *dispersão*: o sinal  $\sin(kx)$  viaja com velocidade 1 se  $\lambda = 0$  mas com velocidade que depende de  $k$  se  $\lambda \neq 0$  (uma sobreposição de senos viaja inalterada se  $\lambda = 0$  mas muda de forma se  $\lambda \neq 0$ )
  
- Considere a equação  $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \lambda u = 0$ .
  - a) Mostre que se a solução regular  $u(\cdot, t)$  tem suporte compacto para todo  $t$ , então a energia  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2 + \lambda u^2$  satisfaz  $E'(t) = -\alpha \int_{\mathbb{R}} u_t^2$  (sugestão, vai precisar fazer uma integração por partes).
  - b) Encontre a solução explícita quando  $\lambda = \alpha^2/4$  (sugestão: mude incógnita para eliminar o termo  $u_t$ ).  
Este fenômeno se chama *dissipação*: o termo  $u_t$  dissipa energia e a solução decai. ★

**Exercício 6.8. Equação da onda em domínios limitados - Energia**

Seja  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um domínio limitado e regular, de borda  $\partial\Omega$  e normal exterior  $n$ , e seja  $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$  satisfazendo  $u_{tt} - \Delta u = 0$ , em  $\Omega$ ; defina  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + |\nabla_x u|^2$ . Mostre que se vale a condição à borda de Dirichlet ( $u(x, t) = 0$  para todo  $t > 0$  e  $x \in \partial\Omega$ ) ou de Neumann ( $\frac{\partial}{\partial n} u(x, t) = 0$  para todo  $t > 0$  e  $x \in \partial\Omega$ ) então  $E(t)$  é constante.

Deduzo um resultado de *unicidade*. ★

**Exercício 6.9. Efeito dos termos de ordem menor na equação da onda em geral**

- Considere a equação  $u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t = 0$  com  $\alpha \geq 0$  e o problema de Cauchy em  $t = 0$ .
  - a) Mostre a unicidade de solução do problema de Cauchy mostrando que a solução com dados nulos em  $B_t(x)$  é nula no cone do passado do ponto  $(x, t)$ .
  - b) Deduza que a velocidade de propagação é finita e então o suporte de  $u(\cdot, t)$  é compacto se os dados do problema de Cauchy em  $t = 0$  são a suporte compacto.
  - c) Mostre que para dados a suporte compacto a energia  $E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2 + |\nabla_x u|^2$  é não crescente (*dissipação*).
  
- Considere a equação  $u_{tt} - \Delta u + q(x)u = 0$  sendo  $q \geq 0$  (onda em meios não homogêneos) e o problema de Cauchy em  $t = 0$ .
  - a) Defina uma noção de energia apropriada e mostre a unicidade de solução do problema de Cauchy mostrando que a solução com dados nulos em  $B_t(x)$  é nula no cone do passado do ponto  $(x, t)$ .
  - b) Deduza que a velocidade de propagação é finita e então o suporte de  $u(\cdot, t)$  é compacto se os dados do problema de Cauchy em  $t = 0$  são a suporte compacto.
  - c) Mostre que para dados a suporte compacto a energia definida é conservada. ★

## 6.6 A equação da onda em dimensão ímpar maior que um

Nesta seção deduziremos a solução do problema (6.2) homogêneo, isto é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (6.20)$$

quando  $n > 1$  é ímpar.

### 6.6.1 Alguns lemas e definições

Para calcular a solução aproveitaremos a invariância por rotações do Laplaciano; precisaremos então de algumas definições e lemas técnicos.

- Denotaremos por  $\omega_n$  a medida da esfera unitária em  $\mathbb{R}^n$ , isto é

$$\omega_n = \int_{\partial B_1} dS.$$

Assim a medida de uma esfera de raio  $r$  será  $\omega_n r^{n-1}$  e a de uma bola de raio  $r$  será  $\frac{\omega_n}{n} r^n$ . Os primeiros valores de  $\omega_n$  são  $\omega_1 = 2$ ,  $\omega_2 = 2\pi$ ,  $\omega_3 = 4\pi$ .

- Denotaremos por  $\int_A f dA$  a média de  $f$  em  $A$ , isto é

$$\int_A f dA = \frac{\int_A f dA}{|A|}.$$

A seguir desenvolvemos algumas contas que serão usadas mais tarde.

- Se  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$  e  $A = \partial B_r(x)$ , podemos explicitar a média e mudar de variável pondo  $y = x + r\eta$ , assim  $dS_y = r^{n-1} dS_\eta$ , obtendo

$$\begin{aligned} \partial_r \int_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y &= \partial_r \left( \int_{\partial B_1(0)} f(x + r\eta) \frac{r^{n-1}}{\omega_n r^{n-1}} dS_\eta \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} [\nabla f(x + r\eta) \cdot \eta] dS_\eta = \int_{\partial B_r(x)} \nabla f(y) \cdot \frac{y - x}{r} dS_y. \end{aligned} \quad (6.21)$$

- Se  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  podemos aplicar de novo o teorema da divergência:

$$\begin{aligned} \partial_r \int_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} [\nabla f(x + r\eta) \cdot \eta] dS_\eta = \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \operatorname{div}_\eta [\nabla f(x + r\eta)] dV_\eta, \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde  $\operatorname{div}_\eta[\nabla f(x + r\eta)] = r\Delta f(x + r\eta)$ , logo (agora  $dV_y = r^n dV_\eta$ )

$$\begin{aligned} \partial_r \int_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y &= \frac{r}{\omega_n} \int_{B_1(0)} \Delta f(x + r\eta) dV_\eta = \frac{r}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \Delta f(y) dV_y \\ &= \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta f(y) dV_y. \end{aligned} \tag{6.23}$$

**Definição 6.10.** *Sejam  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$ ; definimos **média esférica** de  $f$ , de centro  $x$  e raio  $r$  a quantidade*

$$M_f(x, r) := \int_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y.$$

Observe que podemos reescrever  $M_f$  da seguinte maneira:

$$M_f(x, r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f(x + r\eta) dS_\eta; \tag{6.24}$$

adotando (6.24) como definição, podemos estender  $M_f(x, r)$  para todo  $r \in \mathbb{R}$  como uma função par e contínua com  $M_f(x, 0) = f(x)$ .

Além disso, podemos passar as derivadas com respeito a  $x$  e a  $r$  dentro do sinal de integral em (6.24), deduzimos que

**Lema 6.11.** *Se  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$  então  $M_f(x, r) \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ .*

Vejam agora uma outra propriedade da média esférica:

**Lema 6.12.** *Se  $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$  então  $M_f$  satisfaz*

$$\Delta_x M_f(x, r) = \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_f(x, r)$$

para todo  $r \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Seja  $r > 0$ : operando como em (6.23) chegamos a

$$\begin{aligned} \partial_r M_f &= \frac{r}{\omega_n r^n} \int_{B_r(0)} \Delta f(x + z) dV_z = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r d\rho \int_{\partial B_\rho(0)} \Delta f(x + z) dS_z \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \int_{\partial B_1(0)} \Delta f(x + \rho\tau) dS_\tau. \end{aligned} \tag{6.25}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r^{n-1} \partial_r^2 M_f + (n-1)r^{n-2} \partial_r M_f &= \partial_r (r^{n-1} \partial_r M_f) = \\ &= \frac{1}{\omega_n} r^{n-1} \int_{\partial B_1(0)} \Delta f(x + r\tau) dS_\tau = r^{n-1} M_{\Delta f}; \end{aligned} \tag{6.26}$$

dividindo por  $r^{n-1}$  e como  $M_{\Delta f} = \Delta_x M_f$  chegamos ao resultado esperado quando  $r > 0$ .

Para  $r < 0$  a fórmula ainda vale pois tudo é par.

Quando  $r \rightarrow 0$  temos que  $\Delta_x M_f(x, r) \rightarrow \Delta f(x)$ , logo também  $(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r) M_f(x, r)$  pode ser estendido por continuidade ao valor  $\Delta f(x)$ .  $\square$

**Corolário 6.13.** Se  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  então  $\square u = 0$  se e só se

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x, r, t) = \partial_t^2 M_u(x, r, t), \quad \text{para } r > 0, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad (6.27)$$

onde a média é feita apenas na variável  $x$ .

*Demonstração.* Se  $u_{tt} = \Delta_x u$  então  $(M_u)_{tt} = M_{u_{tt}} = M_{\Delta_x u} = \Delta_x M_u = (\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_u$ .

Viceversa, se  $(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r) M_u(x, r, t) = \partial_t^2 M_u(x, r, t)$  para  $r > 0$  então  $M_{u_{tt}} = M_{\Delta_x u}$  e no limite quando  $r \rightarrow 0$  obtemos  $u_{tt} = \Delta_x u$ .  $\square$

Precisaremos também da seguinte identidade:

**Lema 6.14.** Se  $n > 1$  é ímpar e  $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R})$  então valem as seguintes identidades:

$$D^2 \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} [x^{n-2}\phi(x)] = \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[ x^{n-2} \left( \phi''(x) + \frac{(n-1)}{x}\phi'(x) \right) \right], \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} [x^{n-2}\phi(x)] = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} C_j(n)x^{j+1}D^j\phi(x), \quad (6.29)$$

onde  $C_j(n)$  são coeficientes reais e  $C_0(n) = (n-2) \cdot (n-4) \dots 3 = \prod_{k=1}^{(n-3)/2} n-2k$ .

*Demonstração.* Seja  $n = 2k+1$ , então (6.28) se torna: se  $\phi \in \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$  então

$D^2 \left(\frac{D}{x}\right)^{k-1} [x^{2k-1}\phi(x)] = \left(\frac{D}{x}\right)^k (x^{2k}\phi'(x)) = \left(\frac{D}{x}\right)^{k-1} \left[ x^{2k-1} \left( \phi''(x) + 2k\frac{\phi'(x)}{x} \right) \right]$  : a segunda igualdade vem da regra da cadeia: precisamos mostrar a primeira.

Primeiramente verifiquemos que ela é verdadeira para as potências  $x^m$ :

de fato  $D^2 \left(\frac{D}{x}\right)^{k-1} [x^{2k-1+m}] = CD^2x^{m+1} = C(m+1)mx^{m-1}$  enquanto

$(D/x) \left(\frac{D}{x}\right)^{k-1} [mx^{2k-1+m}] = Cm(D/x)x^{m+1} = C(m+1)mx^{m-1}$  (mesmo no caso  $m=0$  a identidade está satisfeita pois se torna  $0=0$ ).

Enfim, se  $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}) = \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R})$ , podemos subtrair seu polinômio de Taylor de ordem  $k+1$  em um genérico ponto  $x_0$  (que satisfaz a identidade por ser soma de potências) sobrando um termo cujas derivadas até a ordem  $k+1$  são nulas em  $x_0$ , que logo satisfaz também a identidade pois ela envolve apenas estas derivadas.

A identidade (6.29) é trivialmente verdadeira para  $n=3$ . Supondo ela verdadeira para certo  $n$  calculemos o caso  $n+2$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-1}{2}} [x^n\phi(x)] &= \frac{D}{x} \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} [x^{n-2}(x^2\phi(x))] = \frac{D}{x} \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} C_j(n)x^{j+1}D^j(x^2\phi(x)) = \\ &= 3C_0(n)x\phi(x) + C_0(n)x^2\phi'(x) + \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\frac{n-3}{2}} C_j(n)((j+1)x^{j-1}D^j(x^2\phi(x)) + x^jD^{j+1}(x^2\phi(x))). \end{aligned}$$

Desenvolvendo  $D^i(x^2\phi(x))$  obtemos termos da forma  $x^2D^i(\phi(x))$ ,  $xD^{i-1}(\phi(x))$  e  $D^{i-2}(\phi(x))$ , assim todo termo do desenvolvimento será da forma  $x^{j+1}D^j(\phi(x))$ , com  $j$  de 0 até  $\frac{n-3}{2}+1$ , o que prova o caso  $n+2$  para oportunos coeficientes  $C_j(n+2)$ .



Enfim, o termo com  $j = 0$  em (6.29) virá da regra da cadeia quando todas as  $\frac{n-3}{2}$  derivadas são aplicadas em  $x^{n-2}$ , logo (a cada aplicação de  $(D/x)$  o grau baixa de dois) será

$$[(n-2) \cdot (n-4) \dots 3] x \phi(x).$$

□

## 6.6.2 Cálculo da solução

Para resolver (6.20) faremos o seguinte: seja  $n > 1$  a dimensão ímpar e suponhamos inicialmente que  $u$  e logo  $M_u$  sejam de classe  $\mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$ , para podermos aplicar a identidade (6.28).

Aplicamos o operador  $\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2}(\cdot)]$  à equação (6.27) para  $M_u$ :

$$\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[ r^{n-2} \left[ \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_u(x, r, t) \right] \right] = \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[ r^{n-2} [\partial_t^2 M_u(x, r, t)] \right];$$

comutando as derivadas e usando (6.28) obtemos

$$\partial_r^2 \left[ \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_u(x, r, t)] \right] = \partial_t^2 \left[ \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_u(x, r, t)] \right]. \quad (6.30)$$

Deduzimos que a quantidade  $\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_u(x, r, t)]$  satisfaz, para todo  $x$ , a equação da onda em dimensão um nas variáveis  $r, t$ . Logo podemos encontrá-la usando a fórmula de D'Alambert.

**Observação 6.15.** No caso  $n = 3$  a formulação resulta bem mais simples: a equação (6.30) será simplesmente

$$\partial_r^2 [r M_u(x, r, t)] = \partial_t^2 [r M_u(x, r, t)].$$

◁

Definamos então

$$\begin{cases} V(x, r, t) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_u(x, r, t)], \\ F(x, r) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_\phi(x, r)], \\ G(x, r) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} [r^{n-2} M_\psi(x, r)]; \end{cases} \quad (6.31)$$

observe que  $V, F, G$  são funções ímpares em  $r$ , pois  $M$  é par,  $\left(\frac{\partial_r}{r}\right)$  não muda a paridade mas  $r^{n-2}$  é ímpar.

Aplicando a fórmula de D'Alambert temos que a solução de

$$\begin{cases} V_{tt}(x, r, t) - V_{rr}(x, r, t) = 0, \\ V(x, r, 0) = F(x, r), \\ V_t(x, r, 0) = G(x, r) \end{cases} \quad (6.32)$$

é

$$V(x, r, t) = \frac{F(x, r-t) + F(x, r+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} G(x, \xi) d\xi. \quad (6.33)$$

Precisamos agora voltar a obter  $u$ . Como estamos assumindo  $M_u \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$  podemos usar o desenvolvimento em (6.29) obtendo  $V(x, r, t) = \sum_{j=0}^{\frac{n-3}{2}} C_j(n)r^{j+1}\partial_r^j M_u(x, r, t)$ ; como todas as derivadas de  $M_u$  que aparecem neste desenvolvimento são contínuas, calculando  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, r, t)}{r}$  apenas sobrar  o termo com  $j = 0$ , isto é,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, r, t)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \gamma_n M_u(x, r, t) = \gamma_n u(x, t), \tag{6.34}$$

onde  $\gamma_n := C_0(n) = (n - 2) \cdot (n - 4) \dots 3 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{(n-3)/2} n - 2k$ .

De (6.33) e (6.34) podemos calcular

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{F(x, r + t) + F(x, r - t)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} G(x, \xi) d\xi \right),$$

onde, usando que  $F$    ímpar na segunda variável,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(x, r + t) + F(x, r - t)}{2r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(x, r + t) - F(x, t - r)}{2r} = \partial_2 F(x, t);$$

enquanto como  $G$  também   ímpar na segunda variável, logo  $\int_{r-t}^{t-r} G(x, \xi) d\xi = 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} G(x, \xi) d\xi = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} G(x, \xi) d\xi = G(x, t);$$

concluímos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} [\partial_2 F(x, t) + G(x, t)], \tag{6.35}$$

isto é,

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \partial_t \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B_t(x)} \phi dS \right) + \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-3}{2}} \left( t^{n-2} \int_{\partial B_t(x)} \psi dS \right) \right]; \tag{6.36}$$

esta é a **fórmula resolutiva da equa o da onda homogênea em dimensão  $n > 1$  ímpar**.

Quando  $n = 3$  (6.36) torna-se

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( t \int_{\partial B_t(x)} \phi dS \right) + t \int_{\partial B_t(x)} \psi dS; \tag{6.37}$$

pode ser útil reescrever (6.37) explicitando a derivada: usando (6.21)

$$u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + t \nabla \phi(y) \cdot \vec{n} + t \psi(y)] dS_y = \int_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + \nabla \phi(y) \cdot (y - x) + t \psi(y)] dS_y; \tag{6.38}$$

esta é chamada **fórmula de Kirchhoff** (refere-se ao caso  $n = 3$ ).

Observe que a fórmula (6.36) foi deduzida supondo  $u$  de classe  $\mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$  para poder aplicar as identidades do lema 6.14, porém veremos que a fórmula vale mesmo se  $u$  é apenas de classe  $\mathcal{C}^2$ , uma vez que será suficiente poder aplicar o lema 6.14 a  $M_\phi$  e  $M_\psi$ . Isso é o resultado do seguinte teorema:

**Teorema 6.16.** *Se  $n > 1$  é ímpar,  $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  então existe uma solução  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  de (6.20) e é dada pela (6.36).*

*Em particular, (6.36) satisfaz  $\square u = 0$  para  $t > 0$  e pode ser prolongada por continuidade em  $t = 0$  até satisfazer as condições iniciais.*

*Demonstração.* Voltemos a considerar a fórmula (6.35)  $\gamma_n u(x, t) = F_t(x, t) + G(x, t)$ .

Como  $F(x, t) = \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} M_\phi(x, t)]$  e  $M_\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}$  temos que  $F \in \mathcal{C}^3$  e podemos aplicar a identidade (6.28) obtendo

$$\partial_t^2 F(x, t) = \partial_t^2 \left[ \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} M_\phi(x, t)] \right] = \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[ t^{n-2} \left[ \left(\partial_t^2 + \frac{n-1}{t} \partial_t\right) M_\phi(x, t) \right] \right];$$

usando o lema 6.12 obtemos

$$\partial_t^2 F(x, t) = \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} [\Delta_x M_\phi(x, t)]] = \Delta_x \left[ \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} M_\phi(x, t)] \right] = \Delta_x F(x, t),$$

isto é e  $F_{tt}(x, t) = \Delta_x F(x, t)$ ; derivando obtemos

$$F_t \in \mathcal{C}^2 \quad e \quad (F_t)_{tt}(x, t) = \Delta_x F_t(x, t).$$

Analogamente, como  $M_\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}$  obtemos que

$$G \in \mathcal{C}^2 \quad e \quad G_{tt}(x, t) = \Delta_x G(x, t)$$

e logo de (6.35) obtemos

$$u \in \mathcal{C}^2 \quad e \quad u_{tt}(x, t) = \Delta_x u(x, t).$$

Apenas precisamos ainda mostrar que  $u$  satisfaz a condição inicial: isto não é óbvio pois a fórmula (6.36) não vale em  $t = 0$ , logo precisamos mostrar que pode ser prolongada por continuidade até satisfazer as condições iniciais.

Usando o desenvolvimento em (6.29) obtemos

$$\begin{cases} F(x, t) = \gamma_n t M_\phi(x, t) + C_1(n) t^2 \partial_t M_\phi(x, t) + o(t^2), \\ F_t(x, t) = \gamma_n M_\phi(x, t) + \gamma_n t \partial_t M_\phi(x, t) + 2C_1(n) t \partial_t M_\phi(x, t) + o(t), \\ G(x, t) = \gamma_n t M_\psi(x, t) + o(t), \end{cases}$$

logo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{t \rightarrow 0} [\partial_t F(x, t) + G(x, t)] = \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{t \rightarrow 0} [\gamma_n M_\phi(x, t) + \gamma_n t \partial_t M_\phi(x, t) + 2C_1(n) t \partial_t M_\phi(x, t) + \gamma_n t M_\psi(x, t) + o(t)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} M_\phi(x, t) = \phi(x); \end{aligned}$$

analogamente

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} u_t(x, t) &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{t \rightarrow 0} \partial_t [\partial_t F(x, t) + G(x, t)] = \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \lim_{t \rightarrow 0} [(2\gamma_n + 2C_1(n))\partial_t M_\phi(x, t) + \gamma_n M_\psi(x, t) + o(1)] = \lim_{t \rightarrow 0} M_\psi(x, t) = \psi(x),\end{aligned}$$

já que  $\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t M_\phi(x, t) = 0$  por ser  $M_\phi$  par em  $t$ .  $\square$

**Observação 6.17.** Fica claro da demonstração anterior que dada uma função  $f \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  ( $n$  ímpar), definindo  $F(x, t) = \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} [M_f(x, t)]]$ , vale

$$\Delta_x F = F_{tt},$$

isto é, aplicando o operador  $\left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} [t^{n-2} [\cdot]]$  à média esférica (com raio  $t$ ) de uma função  $\mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$  o resultado satisfaz a equação da onda em dimensão  $n$ .

É esta propriedade da média esférica que nos permitiu obter o resultado.  $\triangleleft$

### 6.6.3 Solução no caso radial em dimensão ímpar

(Veja [FL] ex 2 página 174).

Se uma solução  $u(x, t)$  da equação da onda homogênea é radial, isto é,  $u(x, t) = \tilde{u}(\rho, t)$  sendo  $\rho = |x|$ , então  $\Delta u = \tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} \tilde{u}_\rho$ , logo  $\tilde{u}$  satisfaz a equação

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{n-1}{\rho} \tilde{u}_\rho.$$

Se  $n > 1$  é ímpar e assumimos suficiente regularidade, usando a identidade (6.28), deduzimos que  $V(\rho, t) := \left(\frac{\partial_\rho}{\rho}\right)^{\frac{n-3}{2}} [\rho^{n-2} \tilde{u}(\rho, t)]$  satisfaz  $V_{tt} = V_{\rho\rho}$ , isto é, temos que a solução de

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta_x u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (6.39)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são radiais (isto é,  $\phi(x) = \tilde{\phi}(|x|)$  e  $\psi(x) = \tilde{\psi}(|x|)$ ) pode ser encontrada resolvendo

$$\begin{cases} V_{tt}(\rho, t) - V_{\rho\rho}(\rho, t) = 0, \\ V(\rho, 0) = F(\rho) := \left(\frac{\partial_\rho}{\rho}\right)^{\frac{n-3}{2}} [\rho^{n-2} \tilde{\phi}(\rho)], \\ V_t(\rho, 0) = G(\rho) := \left(\frac{\partial_\rho}{\rho}\right)^{\frac{n-3}{2}} [\rho^{n-2} \tilde{\psi}(\rho)], \end{cases} \quad (6.40)$$

onde as condições iniciais  $F$  e  $G$  serão prolongadas de maneira par quando  $\rho \leq 0$ . Obtemos então, aplicando a fórmula de D'Alambert,

$$V(\rho, t) = \frac{F(\rho+t) + F(\rho-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\rho-t}^{\rho+t} G(\xi) d\xi; \quad (6.41)$$

em particular, se  $n = 3$

$$\rho \tilde{u}(\rho, t) = \frac{(\rho + t)\tilde{\phi}(\rho + t) + (\rho - t)\tilde{\phi}(\rho - t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{\rho-t}^{\rho+t} \xi \tilde{\psi}(\xi) d\xi. \quad (6.42)$$

Observe-se que a fórmula não faz sentido para  $\rho = 0$ , mas neste caso é bem mais fácil avaliar diretamente a fórmula geral (6.36), já que as médias esféricas são imediatas.

## 6.7 A equação da onda em dimensão par

Nesta seção deduziremos a solução do problema (6.20) quando  $n$  é par. A técnica será deduzir a solução do caso em dimensão  $n + 1$  supondo que tudo seja constante com respeito a uma das variáveis (método de descida ou de Hadamard).

Procuremos então a solução  $u(x, t)$  (com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $n$  par) de (6.20) através da solução  $\tilde{u}(x, z, t)$  de

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \Delta_x \tilde{u} - \tilde{u}_{zz} = 0, \\ \tilde{u}(x, z, 0) = \tilde{\phi}(x, z) := \phi(x), \\ \tilde{u}_t(x, z, 0) = \tilde{\psi}(x, z) := \psi(x). \end{cases} \quad (6.43)$$

Como (6.43) é um problema na dimensão ímpar  $n + 1$  temos, pelo teorema 6.16, uma solução  $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1} \times (0, \infty))$  desde que  $\phi, \psi$  (e logo  $\tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ ) sejam, respectivamente, de classe  $\mathcal{C}^{\frac{n+4}{2}}$  e  $\mathcal{C}^{\frac{n+2}{2}}$ .

Da fórmula (6.36) podemos deduzir que  $\tilde{u}$  não dependerá de  $z$ , já que seus dados não dependem, logo  $u(x, t) := \tilde{u}(x, 0, t)$  será solução de classe  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  de (6.20).

Em particular,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, z, t) = \frac{1}{\gamma_{n+1}} \left[ \partial_t \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial \tilde{B}_t(x, z)} \tilde{\phi}(y, w) dS_{y, w} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^{n-1} \int_{\partial \tilde{B}_t(x, z)} \tilde{\psi}(y, w) dS_{y, w} \right) \right]. \quad (6.44) \end{aligned}$$

Podemos descrever as duas semiesferas em  $\mathbb{R}^{n+1}$  que compõe  $\partial \tilde{B}_t(x, z)$  por

$$w = z \pm \sqrt{t^2 - |y - x|^2} : y \in B_t(x) \subseteq \mathbb{R}^n;$$

assim  $dS_{y, w} = dV_y \sqrt{1 + |\nabla_y w|^2} = dV_y \sqrt{1 + \frac{|y-x|^2}{t^2 - |y-x|^2}} = dV_y \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |y-x|^2}}$ . Logo

$$\int_{\partial \tilde{B}_t(x, z)} \tilde{\phi}(y, w) dS_{y, w} = \frac{2}{\omega_{n+1} t^n} \int_{B_t(x)} \phi(y) \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |y-x|^2}} dV_y = \quad (6.45)$$

$$= \frac{2\omega_n/n}{\omega_{n+1}} \int_{B_t(x)} \phi(y) \sqrt{\frac{t^2}{t^2 - |y-x|^2}} dV_y, \quad (6.46)$$

e uma fórmula análoga vale para  $\psi$ .

Definindo  $\gamma_n := \frac{n\gamma_{n+1}\omega_{n+1}}{2\omega_n}$  (pode-se calcular que  $\gamma_n = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^{n/2} 2k$ ), obtemos a fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{\gamma_n} \left[ \partial_t \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y \right) + \left( \frac{\partial_t}{t} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left( t^n \int_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y \right) \right]; \quad (6.47)$$

esta é a **fórmula resolutiva da equação da onda em dimensão  $n$  par**.

O teorema 6.16 junto com as contas acima implicam no seguinte resultado:

**Teorema 6.18.** *Se  $n$  é par,  $\phi \in C^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi \in C^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$ , então existe uma solução em  $C^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  de (6.20) e é dada pela (6.47).*

*Em particular, (6.47) satisfaz  $\square u = 0$  para  $t > 0$  e pode ser prolongada por continuidade em  $t = 0$  até satisfazer as condições iniciais.*

Quando  $n = 2$  (6.47) torna-se

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \partial_t \left( t^2 \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y \right) + t^2 \int_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y \right]; \quad (6.48)$$

ainda pode ser útil reescrever (6.48) explicitando a derivada: usando (6.21) escrevemos

$$\begin{aligned} \partial_t \left( t^2 \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y \right) &= \partial_t \left( t \int_{B_1(0)} \frac{\phi(x+t\eta)}{\sqrt{1-|\eta|^2}} dV_\eta \frac{t^2}{\pi t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{B_1(0)} \frac{\phi(x+t\eta) + t \nabla \phi(x+t\eta) \cdot \eta}{\sqrt{1-|\eta|^2}} dV_\eta \right) = \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + \nabla \phi(y) \cdot (y-x)}{\frac{1}{t} \sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Logo,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(x)} \frac{t\phi(y) + t \nabla \phi(y) \cdot (y-x) + t^2 \psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}} dV_y; \quad (6.50)$$

esta é chamada **fórmula de Poisson** (refere-se ao caso  $n = 2$ ).

Uma outra forma para para (6.50) é a seguinte:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + \nabla \phi(y) \cdot (y-x) + t\psi(y)}{\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2}} dV_y. \quad (6.51)$$

**Observação 6.19.** A fórmula de Poisson (e também o caso geral (6.47)) é uma integral imprópria, já que a função integranda tende a infinito quando  $y \rightarrow \partial B_t(x)$ , mas a singularidade é de tipo  $\xi^{-1/2}$  com  $\xi \rightarrow 0$ , logo integrável: escrevendo em coordenadas polares a raiz no denominador é  $\sqrt{t^2 - \rho^2} \simeq \sqrt{2t}\sqrt{t - \rho}$  quando  $\rho \rightarrow t$ .

Observe inclusive que o coeficiente  $1/2$  compensa pela integral da função peso, isto é,

$$\frac{1}{2} \int_{B_t(x)} \frac{1}{\sqrt{1 - \left| \frac{y-x}{t} \right|^2}} dV_y = \frac{1}{2\pi t^2} \int_0^t 2\pi \frac{t\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = \frac{1}{t} \left[ -\sqrt{t^2 - \rho^2} \right]_0^t = 1,$$

isto é, um dato  $\phi = \text{const}$  e  $\psi = 0$  dá uma solução  $u = \text{const}$ . ◁

## 6.8 A solução da equação não homogênea

Para obtermos a solução no caso não homogêneo usaremos o chamado **princípio de Duhamel**: isso consiste em afirmar que a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_x u = F(x, t), \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (6.52)$$

pode ser encontrada pela fórmula

$$u(x, t) = \int_0^t u[s](x, t) ds, \quad (6.53)$$

onde  $u[s](x, t)$  é a solução de

$$\begin{cases} u_{tt}[s] - c^2 \Delta_x u[s] = 0, \\ u[s](x, s) = 0, \\ u_t[s](x, s) = F(x, s). \end{cases} \quad (6.54)$$

**Observação 6.20.** A fórmula acima é a versão para EDPs do método de variação das constantes arbitrárias: de fato uma solução de  $u_{tt} - c^2 \Delta_x u = F(x, t)$  é obtida sobrepondo soluções da homogênea com pesos que dependem da função  $F$ .  $\triangleleft$

Mostremos primeiro que a fórmula funciona:

**Teorema 6.21.** *Seja  $F \in \mathcal{C}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , então (6.53) é de classe  $\mathcal{C}^2$  e é solução de (6.52).*

*Demonstração.* Primeiro observe que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  vale  $\frac{n+2}{2}$  se  $n$  é par e  $\frac{n+1}{2}$  se  $n$  é ímpar: como em (6.54)  $F$  está no lugar da  $\psi$  dos teoremas 6.16 e 6.18, eles garantem que  $u[s]$  seja de classe  $\mathcal{C}^2$ , logo também a  $u$  de (6.53).

Calculemos

$$u_t = \partial_t \left( \int_0^t u[s](x, t) ds \right) = u[t](x, t) + \int_0^t u_t[s](x, t) ds = \int_0^t u_t[s](x, t) ds$$

pela condição em (6.54)  $u[t](x, t) = 0$ .

Pondo  $t = 0$  nesta equação e em (6.53) vemos que  $u$  satisfaz ambas as condições iniciais de (6.52). Derivando mais uma vez obtemos

$$u_{tt} = \partial_t \left( \int_0^t u_t[s](x, t) ds \right) = u_t[t](x, t) + \int_0^t u_{tt}[s](x, t) ds;$$

usando a equação e a condição inicial de (6.54) obtemos

$$u_{tt}(x, t) = F(x, t) + \int_0^t c^2 \Delta_x u[s](x, t) ds = F(x, t) + c^2 \Delta_x u(x, t) ds,$$

logo  $u$  é solução de (6.52).  $\square$

Falta apenas aplicar as fórmulas resolútivas a (6.54) para obter a solução de (6.52); a solução do problema completo (6.2) será a soma da de (6.52) com a de (6.20), pois o problema é linear.

No caso  $n = 1$ , usando a fórmula de D'Alambert (lembrando que o  $t$  das fórmulas resolútivas deve ser o tempo passado da condição inicial) obtemos  $u[s](x, t) = \frac{1}{2c} \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s) d\xi$ , logo por (6.53)

$$u(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi, s) d\xi,$$

que corresponde à integral de  $F$  no triângulo característico de vértice  $(x, t)$ .

No caso  $n = 2$  (e  $c = 1$  a partir daqui), usando a fórmula de Poisson (6.50) obtemos

$$u[s](x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_{t-s}(x)} \frac{(t-s)^2 F(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |y-x|^2}} dV_y, \quad (6.55)$$

logo por (6.53)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{B_{t-s}(x)} \frac{(t-s)^2 F(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |y-x|^2}} dV_y,$$

explicitando a média obtemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{B_{t-s}(x)} \frac{(t-s)^2 F(y, s)}{\pi(t-s)^2 \sqrt{(t-s)^2 - |y-x|^2}} dV_y = \quad (6.56)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{B_{t-s}(x)} \frac{F(y, s)}{\sqrt{(t-s)^2 - |y-x|^2}} dV_y = \quad (6.57)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{B_\tau(x)} \frac{F(y, t-\tau)}{\sqrt{\tau^2 - |y-x|^2}} dV_y, \quad (6.58)$$

que corresponde à integral (com peso) de  $F$  em toda a região dentro do cone do passado de vértice  $(x, t)$ .

No caso  $n = 3$ , usando a fórmula de Kirchhoff (6.38) obtemos

$$u[s](x, t) = \int_{\partial B_{t-s}(x)} (t-s) F(y, s) dS_y; \quad (6.59)$$

logo por (6.53)

$$u(x, t) = \int_0^t ds \int_{\partial B_{t-s}(x)} (t-s) F(y, s) dS_y,$$

explicitando a média obtemos

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{ds}{4\pi(t-s)^2} \int_{\partial B_{t-s}(x)} (t-s) F(y, s) dS_y = \quad (6.60)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t ds \int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{F(y, s)}{t-s} dS_y = \quad (6.61)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_{\partial B_\tau(x)} \frac{F(y, t-\tau)}{\tau} dS_y = \quad (6.62)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{B_t(x)} \frac{F(y, t-|y-x|)}{|y-x|} dV_y \quad (6.63)$$



que corresponde à integral (com peso) de  $F$  na superfície do cone do passado de vértice  $(x, t)$ .

Esta fórmula é dita do *potencial retardado*: pois a integração é feita pegando os valores de  $F$  em pontos e tempos mais antigos quanto mais são distantes.

## 6.9 Comentários

- Como para o caso  $n = 1$ , uma vez que mostramos existência, unicidade e uma fórmula para a solução podemos verificar dela a dependência contínua dos dados e concluir que o problema de Cauchy (6.2) é *bem posto segundo Hadamard*.
- No caso  $n > 1$  ímpar, se aplicarmos a (6.36) o mesmo procedimento de explicitar as derivadas que usamos para passar de (6.37) a (6.38), podemos ver que a solução em  $(x, t)$  depende de  $\phi, \psi$  e de um certo número de suas derivadas, mas apenas na esfera de centro  $x$  e raio  $t$ , isto é, depende destas funções apenas numa pequena vizinhança desta esfera, e não no interior da bola, como sugeria o teorema 6.3.

Este fato é chamado **princípio de Huygens** e não vale nem em dimensão  $n = 1$  nem em dimensão par, como pode ser visto pela fórmula de D'Alambert e por (6.47).

De fato, comparando as três fórmulas  $n = 1$ ,  $n > 1$  ímpar e  $n$  par, podemos ver importantes *diferenças qualitativas*:

– no caso  $n = 1$ , a solução em  $(x, t)$  depende de  $\phi$  na esfera de centro  $x$  e raio  $t$  (isto é, o dois pontos  $x \pm t$ ), de  $\psi$  na bola inteira (o segmento  $[x - t, x + t]$ ) e de  $F$  no inteiro cone (triângulo) do passado de  $(x, t)$ ;

– no caso  $n > 1$  ímpar a solução em  $(x, t)$  depende de  $\phi, \psi$  (e suas derivadas) apenas na esfera de centro  $x$  e raio  $t$  e de  $F$  apenas na superfície do cone do passado de  $(x, t)$ ;

– no caso  $n$  par, enfim, a solução em  $(x, t)$  depende de  $\phi, \psi$  em toda a bola de centro  $x$  e raio  $t$  e de  $F$  no inteiro cone do passado de  $(x, t)$ .

Escrevamos os casos  $n = 1, 2, 3$  com  $F = 0$  numa forma fácil de comparar:

$$n = 1 : \quad u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} \phi(y) dy + \int_{B_t(x)} t\psi(y) dy, \quad (6.64)$$

$$n = 2 : \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + \nabla\phi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)}{\sqrt{1 - \left|\frac{y-x}{t}\right|^2}} dV_y, \quad (6.65)$$

$$n = 3 : \quad u(x, t) = \int_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + \nabla\phi(y) \cdot (y - x) + t\psi(y)] dS_y. \quad (6.66)$$

Podemos ver que, além das diferenças no domínio de dependência, também nas últimas duas fórmulas aparece o gradiente de  $\phi$ , e na fórmula em dimensão 2 aparece a função a denominador que pesa de maneira diferente os dados segundo sua distância de  $x$  (os na borda da bola têm peso maior, mas todos os na bola têm peso não nulo).

- Os teoremas 6.16 e 6.18 mostram que para ter solução  $\mathcal{C}^2$  precisaremos dados tanto mais regulares quanto maior for a dimensão: isso não é apenas uma necessidade técnica para obter o resultado, mas realmente a regularidade da solução pode ser menor da dos dados, como pode ser visto pelas fórmulas da solução, que envolvem várias derivadas dos

dados. Esta **perda de regularidade** é devida ao fato que as singularidades propagando nos cones característicos podem se somar em algumas regiões dando singularidades mais fortes.

Por outro lado, vimos na observação 6.4 que, pelo menos para dados a suporte compacto, a energia  $\int u_t^2 + |\nabla u|^2$  é conservada: isso significa que a soma das norma  $L^2$  de  $u_t$  e  $\nabla u$  resta constante: a deterioração da regularidade acontece apenas no sentido clássico, não para as derivadas no sentido  $L^2$ .

- O princípio de Huygens tem algumas importantes *consequências físicas*.
  - Como som e luz satisfazem a equação da onda em dimensão 3, o princípio de Huygens implica no fato que um sinal (de luz ou de som) emitido em  $t = 0, x = 0$  é recebido exatamente no instante  $t = |x|$  no ponto  $x$ : isso permite de maneira simples transmitir receber e decodificar sinais sonoros e luminosos. O mesmo não acontece no caso de ondas numa superfície líquida: um sinal emitido em  $t = 0, x = 0$  será recebido no ponto  $x$  a começar do tempo  $t = |x|$ , mas continuaria perturbando o ponto  $x$  para todo  $t > |x|$ , se sobrepondo a eventuais sinais seguintes. Este fenômeno pode ser visto facilmente nas ondas produzidas pela queda de uma pedra: em vez de gerar apenas uma onda circular que propaga com velocidade  $c$  (como aconteceria em dimensão 3) geram-se ondas concêntricas sempre mais fracas mas que nunca se anulam. Este fato também pode ser visualizado pensando no método de descida: se pensarmos na solução com  $n = 2$  como uma solução em  $\mathbb{R}^3$  uniforme numa direção, o sinal emitido em  $t = 0, (x, y) = (0, 0)$  corresponderá em  $\mathbb{R}^3$  a um sinal emitido ao longo do eixo  $z$ , logo um observador começará a perceber o sinal quando chegar o emitido do ponto mais próximo da reta, mas continuará percebendo, sempre mais fracos, os emitidos nos pontos mais longe.
  - Outra consequência do princípio de Huygens é que, para  $n > 1$  ímpar, se os dados iniciais têm suporte compacto, então a solução  $u(\cdot, t)$ , terá também, para  $t$  grande, não apenas suporte compacto mas *suporte contido no anel*  $\{r(t) \leq |x| \leq R(t)\}$ , de fato para  $|x| < r(t)$  a esfera  $\partial B_t(x)$  não terá mais intersecção com o suporte dos dados e assim  $u(x, t) = 0$ . Se além de ter suporte compacto, os dados são limitados e com derivadas limitadas, podemos deduzir que a *solução decairá com o tempo*: de fato a intersecção de  $\partial B_t(x)$  com o suporte dos dados será, para  $t$  grande, da ordem de  $D^{n-1}$  sendo  $D$  o diâmetro do suporte dos dados, logo não aumentará mais de superfície, mas as médias diminuem pois a medida de  $\partial B_t(x)$  cresce como  $t^{n-1}$ ; se considerarmos o caso  $n = 3$ , usando (6.38), temos que a integranda cresce no máximo como  $t$ ,  $\partial B_t(x)$  como  $t^2$  e logo a solução decai como  $1/t$ . Algo parecido pode ser obtido em dimensão par, mas a função peso complica um pouco a questão. Em dimensão um obviamente não tem este decaimento no tempo.

## Bibliografia do capítulo

- Seção 6.1:  
principal: [EV] página 66;
- Seção 6.2:  
principal: [FL] páginas 159..162;
- Seção 6.3:  
principal: [FL] páginas 162..164, [EV] páginas 84,85;
- Seção 6.4:  
principal: [EV] páginas 67,68, [JN] páginas 40..44;
- Seções 6.6 e 6.7:  
principal: [EV] páginas 70..80, [JN] páginas 126..134, [FL] páginas 166..173;
- Seção 6.8:  
principal: [EV] páginas 81,82 (veja também página 49) [JN] páginas 135,136, [FL] páginas 174,175;



# Capítulo 7

## Equações com o operador Laplaciano

Nesta seção estudaremos equações envolvendo o operador Laplaciano, em particular as equações

$$-\Delta u = f(x) \quad e \quad -\Delta u = 0; \quad (7.1)$$

a primeira é chamada **equação de Poisson**, enquanto sua versão homogênea é dita **equação de Laplace**. Observe que estas equações são comumente escritas com o sinal menos antes do operador: veremos mais tarde o porque.

Uma função  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  que satisfaz a equação de Laplace  $-\Delta u = 0$  é dita **função harmônica**.

O operador Laplaciano é invariante por rotações e por translações (verifique isso!), logo aparecerá em modelos físicos de fenômenos que possuem simetrias deste tipo.

Um modelo físico que esta equação representa é o da distribuição de uma substância que difunde ou da temperatura de um corpo em  $\mathbb{R}^n$ , ao equilíbrio: no capítulo 8 veremos como a equação do calor  $u_t - \Delta_x u = f$  modela a difusão de uma substância ou a transmissão do calor num corpo: se impusermos  $u_t = 0$  obtemos a equação de Poisson, que modelará então o *estado do sistema ao equilíbrio*.

Outro caso no qual obtemos o operador Laplaciano é quando temos um problema para um campo vetorial  $V$  (em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) do tipo

$$\begin{cases} \operatorname{div} V = f, \\ \operatorname{rot} V = 0; \end{cases} \quad (7.2)$$

de fato, a segunda equação implica que (pelo menos localmente) existe um potencial para  $V$ , isto é,  $V = \nabla u$ , e a primeira equação torna-se  $\Delta u = f$ .

Dois exemplos deste tipo são:

– quando  $V$  é o *campo eletrostático* e  $f$  a representa a carga elétrica; de fato, as equações de Maxwell completas são

$$\operatorname{div}(E) = \rho/\varepsilon_0 \quad \operatorname{div}(B) = 0 \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot}(E) = -B_t \quad \operatorname{rot}(B) = (j/\varepsilon_0 + E_t)/c^2, \quad (7.4)$$

quando assumimos  $\rho$  (densidade de carga) e  $j$  (densidade de corrente) nulas obtemos o sistema (6.4-6.5) do qual deduzimos a equação da onda; assumindo estacionariedade (derivadas temporais nulas) as equações para  $E$  e para  $B$  desacoplam e obtemos o sistema (7.2);

– quando  $V$  representa o escoamento estacionário irrotacional e incompressível de um fluido (neste caso  $f$  representa eventuais fontes ou "poços" de fluido).

## 7.1 Tipos de problemas

Já vimos no exercício 1.6 que o problema de Cauchy para o Laplaciano é mal posto. Neste caso, sendo o operador invariante, não muda nada trocando de superfície dos dados, como fizemos na seção 6.2 para a equação da onda. Inclusive não se conhecem problemas físicos para o operador Laplaciano pelos quais tenha sentido impor um problema de Cauchy.

Por outro lado, como o operador é elíptico, não teremos nenhuma restrição quanto à orientação da superfície dos dados.

O exercício a seguir nos mostra algumas propriedades que nos sugerem quais tipos de problema podem ser bem postos para o Laplaciano.

*Exercício 7.1.* – Mostre que se  $\tilde{u}(\rho, \theta)$  é a função  $u(x, y)$  em coordenadas polares, então  $\Delta u = 0$  corresponde a  $\tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{\tilde{u}_\rho}{\rho} + \frac{\tilde{u}_{\theta\theta}}{\rho^2} = 0$ .

– Mostre em seguida que pondo  $\rho = e^{-t}$  a equação se torna  $\tilde{u}_{tt} + \tilde{u}_{\theta\theta} = 0$ .

– Resolva, usando estas mudanças de variáveis e separando as variáveis, a equação  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$ , sendo  $\Omega$  o círculo de raio 1 (observação: descarte as soluções que tem singularidade na origem).

– Mostre que não é possível impor arbitrariamente  $u$  e  $u_\nu$  em  $\partial\Omega$ .

– Mostre que é possível impor arbitrariamente  $u$  (suficientemente regular) em  $\partial\Omega$  e isso identifica uma única solução.

– Mostre que é possível impor  $u_\nu$  (suficientemente regular) em  $\partial\Omega$  desde que tenha média nula, e isso identifica a solução a menos de uma constante.

– O que acontece com o problema no complementar do círculo, impondo que a solução seja limitado no infinito? ★

O exercício acima nos mostra os típicos exemplos de problemas que consideraremos para o operador Laplaciano: em vez de impor  $u$  e  $u_\nu$  em  $\partial\Omega$ , o que dará em geral um problema sobredeterminado, imporemos apenas uma das duas (ou uma combinação das duas):

De fato, os problemas físicos que envolvem o operador Laplaciano são tipicamente deste tipo.

**Definição 7.2.** O problema de determinar  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.5)$$

é dito **problema de Dirichlet** para o Laplaciano.

O problema de determinar  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u_\nu(x) = h(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.6)$$

onde  $\nu$  é a normal externa de  $\partial\Omega$  é dito **problema de Neumann** para o Laplaciano.

O problema de determinar  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ \alpha(x)u(x) + u_\nu(x) = \beta(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.7)$$

é dito **problema de Robin** para o Laplaciano.

Exemplos físicos dos problemas acima são os seguintes:

- a distribuição de temperatura ao equilíbrio num corpo com fontes de calor  $f$  e temperatura fixada na fronteira  $g(x)$  satisfaz o problema de Dirichlet (7.5).  
Analogamente, o potencial eletrostático em  $\Omega$  se a distribuição de carga em  $\Omega$  é  $f$  e  $\partial\Omega$  é um condutor (logo o potencial é constante em  $\partial\Omega$ ) satisfaz (7.5) com  $g = c$ .
- Nos dois casos acima, quando em vez de ter temperatura fixada em  $\partial\Omega$  temos o corpo isolado termicamente (fluxo de calor nulo, isto é, derivada normal da temperatura nula) ou quando o campo elétrico ( $E = \nabla u$ ) é conhecido em  $\partial\Omega$ , satisfazem o problema de Neumann (7.6).
- Ainda no problema da temperatura, quando o corpo troca calor com o exterior o fluxo de calor (derivada da temperatura) é proporcional á diferencia de temperatura com respeito à temperatura externa, logo surge um problema de tipo Robin (7.7).
- Considerando o modelo do escoamento irrotacional e incompressível, a velocidade é o gradiente da solução, assim a condição de tipo Neumann aparece numa superfície através da qual o fluido entra com uma certa velocidade (que será zero no caso de uma parede que o fluido não pode atravessar).  
Neste caso é muito importante também o *problema exterior*, no qual a região  $\Omega$  é todo  $\mathbb{R}^n$  menos uma região que representa um obstáculo ao escoamento.

Veremos na próxima seção que uma condição necessária para o problema de Neumann (7.6) ter solução é  $\int_{\Omega} -f = \int_{\partial\Omega} h$ , isto traduz correspondentes condições físicas: no caso do corpo isolado significa que para existir uma solução de equilíbrio a soma (com sinal) das fontes de calor internas ao corpo deve ser zero, no caso do escoamento incompressível, que a soma das fontes de fluido deve igualar o fluxo de fluido que sai da região (conservação da massa).

Como o tipo de problema físico no qual aparece o Laplaciano é o de encontrar a solução dentro de uma região conhecendo algum dato na fronteira, não terá utilidade procurar solução local, pois mesmo existindo uma solução perto da superfície esta poderá depois não poder "fechar" na região inteira. Por isso os problemas deste tipo são mais complicados e o problema da existência será bem mais crítico. Isso também é coerente com a interpretação física: no caso da onda (e veremos do calor) o problema físico é o de prever a evolução de um sistema dada uma certa condição inicial: a variável tempo é distinta das outras e como vimos tem uma certa direção nas relações de influência: a solução em  $(x, t)$  depende apenas do seu cone do passado. Neste tipo de problema o que procuramos é uma solução de equilíbrio, logo todos os pontos influem sobre os outros, e nem sempre tem um motivo físico para acreditar que uma solução exista.

## 7.2 Identidade de Lagrange Green e consequências

Nesta seção consideraremos  $\Omega$  um **domínio**, isto é um conjunto aberto e conexo; além disso  $\Omega$  será limitado com borda regular (o suficiente para aplicar o teorema da divergência).

**Proposição 7.3.** *Dadas  $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  com  $\Omega$  um domínio limitado com borda regular, se todas as integrais convergem, valem as seguintes identidades de Lagrange-Green*

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u) \cdot n \, dS - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u \, dV, \quad (7.8)$$

$$\int_{\Omega} v \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v \nabla u - u \nabla v) \cdot n \, dS + \int_{\Omega} u \Delta v \, dV, \quad (7.9)$$

*Demonstração.* Se  $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ , integrando por partes (isto é, aplicando o teorema da divergência) obtemos (7.8), integrando por partes uma vez mais obtemos (7.9).

Com um procedimento de aproximação é possível estender o resultado ao caso  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  quando tudo converge. □

Dois casos particulares importantes das equações acima são os seguintes

- Pondo  $v \equiv 1$  em (7.8) resulta:

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n \, dS. \quad (7.10)$$

- Pondo  $v = u$  em (7.8) resulta

$$\int_{\Omega} u \Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (u \nabla u) \cdot n \, dS - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dV. \quad (7.11)$$

Vejamos algumas consequências.

- A equação (7.10) implica que para o problema de Neumann (7.6) uma condição necessária é

$$\int_{\Omega} -f \, dV = \int_{\partial\Omega} h \, dS.$$

- Considerando os problema de Dirichlet ou de Neumann homogêneos para a equação de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ \begin{cases} u(x) = 0 \\ \text{ou} \\ u_{\nu}(x) = 0 \end{cases} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.12)$$

Por (7.11) obtemos, em ambos os casos

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0,$$

o que implica  $\nabla u(x) \equiv 0$  em  $\Omega$ , logo  $u = 0$  no problema de Dirichlet, e  $u = \text{const}$ , no problema de Neumann.



Usando a linearidade (se  $u, v$  satisfazem o mesmo problema então  $u - v$  satisfaz (7.12)), o último resultado implica no seguinte teorema.

**Teorema 7.4.** *Se  $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  são ambas soluções do problema de Dirichlet (7.5) então  $u = v$ , se são soluções do problema de Neumann (7.6),  $u - v = \text{constante}$ .*

*Exercício 7.5.* Mostre que a solução de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ \begin{cases} u(x) = g(x) \\ ou \\ u_\nu(x) = h(x) \end{cases} & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.13)$$

é única quando  $\lambda < 0$ .

Verifique que no caso particular  $\Omega = [0, \pi]$ ,  $\lambda = 1$  e condição de Dirichlet homogênea, a solução não é mais única.

Construa um contraexemplo análogo em dimensão dois em um retângulo (observe porém que o retângulo não tem fronteira regular). ★

*Exercício 7.6.* Mostre que a solução do problema de Robin (7.7) é única para  $\alpha > 0$ , procure um exemplo com  $\alpha < 0$  para o qual não tenha unicidade. ★

### 7.3 Propriedade do valor médio para funções harmônicas

Considere agora um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

**Definição 7.7.**

1. Uma função  $u \in C(\Omega)$  é dita **subharmônica** em  $\Omega$  se

$$u(x) \leq \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

2. Uma função  $u \in C(\Omega)$  chame-se **superharmônica** em  $\Omega$  se

$$u(x) \geq \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

Esta propriedade é intimamente ligada ao Laplaciano: de fato vale o seguinte

**Teorema 7.8.** *Se  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaz  $-\Delta u \leq 0$  (resp.  $-\Delta u \geq 0$ ) em  $\Omega$ , então  $u$  é subharmônica (resp. superharmônica).*

*Por consequência, se  $u \in C^2(\Omega)$  satisfaz  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$ , então*

$$u(x) = \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \int_{B_r(x)} u(y) dV_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \quad (7.14)$$

A propriedade em (7.14) é chamada **propriedade do valor médio**.

*Demonstração.* Observe que  $\int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y$  é a média esférica  $M_u(x, r)$  da definição 6.10. Fixado  $x \in \Omega$ , calculemos  $\partial_r \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y$  usando (6.23), obtendo

$$\partial_r \int_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dV_y.$$

Se  $-\Delta u \leq 0$ , esta derivada é não negativa para  $r > 0$ , logo  $u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} M_u(x, r) \leq M_u(x, r)$ , que é a tese. O caso superharmônico é análogo. Observe que integramos o Laplaciano na bola  $B_r(x)$  e não apenas na sua borda, então é necessário  $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ .

No caso de função harmônica é suficiente juntar os dois casos anteriores; para obter  $u(x) = \int_{B_r(x)} u(y) dV_y$  é suficiente integrar sobre as esferas de raio de zero até  $r$ .  $\square$

Mais importante ainda é que vale a recíproca, na forma do seguinte teorema:

**Teorema 7.9. (Recíproca da propriedade do valor médio)** *Se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  é subharmônica (resp. superharmônica) em  $\Omega$  então  $-\Delta u \leq 0$  (resp.  $-\Delta u \geq 0$ ) em  $\Omega$ .*

*Por consequência, se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  satisfaz a Propriedade do Valor Médio em  $\Omega$ , então  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .*

*Demonstração.* Seja  $u$  subharmônica e suponhamos que para algum  $x \in \Omega$  vale  $-\Delta u(x) > 0$ ; como  $u$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , existe uma bola  $\overline{B_{r_0}(x)} \subset \Omega$  na qual  $-\Delta u > 0$ . Mas então,  $M_u(x, r)$  satisfaz

$$\partial_r M_u(x, r) = \frac{r}{n} \int_{B_r(x)} \Delta u(y) dV_y < 0$$

para  $r < r_0$ , o que é uma contradição pois implica  $u(x) > M_u(x, r)$ . Analogamente supondo  $-\Delta u(x) < 0$ .  $\square$

Outra consequência importante da propriedade do valor médio, é que ela implica na regularidade da função:

**Teorema 7.10.** *Se  $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$  satisfaz a propriedade do valor médio (7.14) em  $\Omega$ , então  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .*

*Logo também  $\Delta u = 0$  em  $\Omega$ .*

Juntando os teoremas 7.9 e 7.10 obtemos a seguinte propriedade de regularidade para as soluções da equação de Laplace, ou seja, para as funções harmônicas.

**Corolário 7.11.** *Se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  satisfaz  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$  então  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ .*

Este tipo de afirmação é chamado um *teorema de regularidade*: nos diz que a equação de Laplace  $\Delta u = 0$  tem a propriedade que todas as derivadas de suas soluções existem, mesmo as que não aparecem na equação.

Para demonstrar o teorema 7.10 utilizaremos a técnica dos *moltiplicadores*, que descrevemos rapidamente a seguir.

- Sabemos que existe uma função  $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , par, com  $\tilde{\eta}(0) = 1$  e  $\tilde{\eta}|_{|x| \geq 1} \equiv 0$ .

- Pondo  $\eta(x) = \tilde{\eta}(|x|)$  e re-escalando podemos obter uma função radial simétrica  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  que satisfaça

$$\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta = 1; \quad \eta|_{|x| \geq 1} \equiv 0.$$

- Definindo  $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta(\frac{x}{\varepsilon})$ , e  $\tilde{\eta}_\varepsilon(|x|) = \eta_\varepsilon(x)$  obtemos

$$\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n); \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon = 1; \quad \eta|_{|x| \geq \varepsilon} \equiv 0. \quad (7.15)$$

- Vale o seguinte lema, cuja demonstração poder ser encontrada em [EV], página 630.

**Lema 7.12.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $L^1_{loc}(\Omega)$ ; definindo*

$$f_\varepsilon(x) := \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dV_y$$

*temos*

- $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$  onde  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ ,
- $f_\varepsilon \rightarrow f$  q.t.p., (e uniformemente nos compactos se  $f \in C(\Omega)$ , e em  $L^p_{loc}$  se  $f \in L^p_{loc}$ ), quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

*Demonstração do teorema 7.10.* Considere  $\varepsilon > 0$  e  $\Omega_\varepsilon$  como no lema acima: para  $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &:= \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) u(y) dV_y = \int_{B_\varepsilon(x)} \tilde{\eta}_\varepsilon(|x-y|) u(y) dV_y \\ &= \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}_\varepsilon(\rho) d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(y) dS_y; \end{aligned}$$

usando a propriedade do valor médio temos

$$u_\varepsilon(x) = u(x) \int_0^\varepsilon \tilde{\eta}_\varepsilon(\rho) \omega_n \rho^{n-1} d\rho = u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x).$$

Disso deduzimos que  $u_\varepsilon \equiv u$  em todo  $\Omega_\varepsilon$ ; como  $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$  e  $\varepsilon$  é arbitrário, obtemos  $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . □

**Observação 7.13.** É possível mostrar um resultado ainda mais forte que o teorema 7.10: de fato as soluções da equação de Laplace são sempre *analíticas* (veja por exemplo [JN]p97,98 [EV] p29...32).

**Observação 7.14.** O fato que as soluções de  $-\Delta u = 0$  sejam analíticas, implica que o problema de Cauchy para o Laplaciano não é bem posto nem localmente.

De fato, sabemos do teorema de Cauchy-Kowalevski que se a superfície  $S$  e os dados são analíticos então existe e é única uma solução analítica, mas o resultado acima mostra que se o dado é não analítico, então não poderá existir solução em nenhuma vizinhança de  $S$ , já que

em qualquer aberto esta deve ser analítica. Este é então outro caso no qual a hipótese de analiticidade do teorema de Cauchy-Kowalevski é realmente necessária.

Observe que isso não tem nada a ver com os problemas de Dirichlet e Neumann que estudamos neste capítulo, pois neste caso a solução está de um lado apenas da superfície  $\partial\Omega$ , logo pode ser analítica mesmo se o dado não é. Por outro lado, estes problemas são mais complicados pelo fato de procurarmos soluções globais e não apenas perto de uma superfície, logo a existência dada pelo teorema de Cauchy-Kowalevski não seria suficiente.

## 7.4 Princípio de máximo

**Definição 7.15.** Dizemos que o operador  $L$  satisfaz o **princípio do máximo em  $\Omega$  na versão fraca** se  $Lu \leq 0$  implica

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x). \quad (7.16)$$

Dizemos que o operador  $L$  satisfaz o **princípio do máximo em  $\Omega$  na versão forte** se  $Lu \leq 0$  implica que

$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ é tal que } u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \text{ então } u \text{ é constante em } \Omega. \quad (7.17)$$

**Observação 7.16.** Quando  $L$  é linear, trocando  $u$  por  $-u$  podemos sempre obter afirmações análogas afirmando que  $Lu \geq 0$  implica  $\min_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \min_{\partial\Omega} u(x)$  ou que se  $x_0 \in \Omega$  é tal que  $u(x_0) = \min_{x \in \bar{\Omega}} u(x)$  então  $u$  é constante em  $\Omega$ .  $\triangleleft$

Para o operador Laplaciano temos o seguinte resultado:

**Teorema 7.17.** Se  $\Omega$  é um domínio (conexo) limitado, o operador  $-\Delta$  satisfaz o princípio de máximo tanto na versão fraca quanto na versão forte, para funções em  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , isto é,  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  e  $-\Delta u \leq 0$  implica (7.16) e (7.17).

Em particular, se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  é harmônica então valem (7.16), (7.17) e suas versões com mínimo enunciadas na observação 7.16.

*Demonstração.* Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  com  $-\Delta u \leq 0$  em  $\Omega$  e seja  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = M$ ; tomando uma bola  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ , pelo teorema 7.8

$$M = u(x_0) \leq \int_{\partial B_\rho(x_0)} u \leq M, \text{ para todo } \rho \in (0, \varepsilon];$$

logo  $M = \int_{\partial B_\rho(x_0)} u$ , para todo  $\rho \in (0, \varepsilon]$ , mas como  $u \leq M$  a única maneira de termos isso é se  $u \equiv M$  em  $B_\varepsilon(x_0)$ .

Agora, consideremos o conjunto  $\Omega_M := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ . Pelas contas anteriores este conjunto é aberto em  $\Omega$ , mas também é fechado (em  $\Omega$ ), pois é um conjunto de nível da função contínua  $u$ . Como  $\Omega$  é conexo temos  $\Omega = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ , logo  $u \equiv M$  em  $\Omega$ .

A versão fraca do princípio do máximo segue facilmente da versão forte: se  $\max_{\bar{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u$ , então existe  $x_0 \in \Omega$  tal que  $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u$ , logo  $u \equiv u(x_0)$  e como  $u$  é contínua até a borda teríamos  $\max_{\partial\Omega} u = \max_{\bar{\Omega}} u$ , contradizendo a suposição.  $\square$

**Observação 7.18.** Como a demonstração do teorema 7.17 foi baseada na propriedade do valor médio, as mesmas conclusões podem ser obtidas apenas assumindo que  $u$  seja em  $C^0(\bar{\Omega})$  e que seja subharmônica.

**Observação 7.19.** Vimos na demonstração do teorema que o princípio forte implica no fraco, mas para alguns operadores pode valer apenas o fraco e não o forte. Por isso é interessante obter uma demonstração alternativa para o princípio de máximo fraco que não use a propriedade do valor médio, de maneira que possa ser facilmente estendida a outros operadores.

*Demonstração alternativa do princípio de máximo fraco.* Primeiro consideremos o caso  $-\Delta u < 0$ : se  $x_0 \in \Omega$  é ponto de máximo então  $\partial_{x_i}^2 u(x_0) \leq 0$  para todo  $i$ , logo  $\Delta u(x_0) \leq 0$ , o qual é uma contradição. Portanto  $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$ .

Agora consideremos o caso geral  $-\Delta u \leq 0$  e seja  $v = u + \varepsilon|x|^2$ , observemos que  $|x|^2 \in C^2(\mathbb{R}^n)$  e  $\Delta|x|^2 = 2n$ . Assim temos

$$-\Delta v = -\Delta u - 2n\varepsilon < 0,$$

logo pela conta anterior  $\max_{\bar{\Omega}} v = \max_{\partial\Omega} v$ , logo

$$\max_{\bar{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\bar{\Omega}} |x|^2 \leq \max_{\bar{\Omega}} (u + \varepsilon|x|^2) = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon|x|^2) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2.$$

Como  $\bar{\Omega}$  é compacto, temos que  $\max$  e  $\min$  de  $|x|^2$  são finitos, logo fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos  $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$ . □

*Exercício 7.20.* Mostre, adaptando a demonstração anterior, que o operador elíptico  $Lu = -\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + \mathbf{b} \cdot \nabla u$  com os  $a_i > 0$  satisfaz o princípio de máximo fraco.

**Observação 7.21.** No caso do problema de Dirichlet com condição homogênea

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.18)$$

o princípio de máximo fraco implica que se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  é solução de (7.18) e  $f \leq 0$  então  $u \leq 0$  em  $\Omega$ , analogamente se  $f \geq 0$  então  $u \geq 0$  em  $\Omega$ .

Aplicando a versão forte obtemos que  $f \leq 0$  implica a alternativa  $u < 0$  ou  $u \equiv 0$  em  $\Omega$  (resp.  $f \geq 0$  implica a alternativa  $u > 0$  ou  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ ).

Este exemplo explica porque a equação com o Laplaciano é comumente escrita com o menos antes do operador: assim o sinal de  $-\Delta u$  em (7.18) é o mesmo da solução  $u$ . ◁

Uma consequência do princípio de máximo é o seguinte resultado, que é uma forma de **dependência contínua dos dados** para o problema de Dirichlet (7.5):

**Teorema 7.22.** Se  $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  são soluções do problema de Dirichlet (7.5) com a mesma  $f$  e com dados na fronteira, respectivamente,  $g_1$  e  $g_2$ , então  $\max_{\bar{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max |g_1 - g_2|$ , isto é,

$$|u_1 - u_2|_{\infty} \leq |g_1 - g_2|_{\infty}.$$

*Demonstração.* Por serem lineares, subtraindo os dois problemas obtemos que  $\delta = u_1 - u_2$  será solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta\delta = 0 & \text{em } \Omega, \\ \delta = g_1 - g_2 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.19)$$

logo pelo princípio de máximo  $\max_{\overline{\Omega}} \delta \leq \max(g_1 - g_2)$  e o mesmo vale para os mínimos.  $\square$

Como corolário (pondo  $g_1 = g_2$ ) podemos mostrar a **unicidade da solução do problema de Dirichlet** (7.5) na classe (um pouco mais ampla da do teorema (7.4)) das funções  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ :

**Corolário 7.23.** *Se  $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$  são ambas soluções do problema de Dirichlet (7.5) então  $u = v$ .*

Concluimos com uma versão do princípio de máximo que vale para domínios não limitados ou quando não temos continuidade até a fronteira:

**Teorema 7.24.** *Se  $\Omega$  é um aberto conexo,  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  e  $-\Delta u \leq 0$  em  $\Omega$  então vale uma das seguintes:*

- $\sup_{\Omega} u = +\infty$ ,
- $u$  não atinge seu supremo em  $\Omega$ ,
- $u$  é constante.

*Demonstração.* É suficiente observar que se o supremo for finito e atingido em  $\Omega$  então, operando como na demonstração do teorema (7.17), deduziríamos (sendo  $\Omega$  conexo) que  $u$  é constante.  $\square$

## 7.5 Soluções fundamentais

Lembramos a seguinte notação:  $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$  é o subespaço de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  das funções com suporte compactamente contido em  $\Omega$ , isto é, das  $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$  tais que  $\overline{\{u \neq 0\}} \subseteq \Omega$  e é limitado.

Nesta seção usaremos a fórmula de Lagrange-Green (7.9) para definir uma **solução generalizada**:

**Definição 7.25.**

*Dizemos que  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$  é solução no sentido das distribuições de  $-\Delta u = f$  em  $\Omega$  se*

$$-\int_{\Omega} u \Delta \phi = \int_{\Omega} f \phi \quad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega). \quad (7.20)$$

A definição 7.25 é justificada pelo fato que se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  satisfizer pontualmente  $-\Delta u = f$  então vale

$$-\int_{\Omega} \Delta u \phi = \int_{\Omega} f \phi = -\int_{\Omega} u \Delta \phi + \int_{\partial\Omega} (u \nabla \phi - \phi \nabla u) \cdot n \, dS,$$

mas o termo de fronteira é nulo pois  $\phi$  é nula perto de  $\partial\Omega$ .

Viceversa, se  $f \in \mathcal{C}^0$  e  $u \in \mathcal{C}^2$  satisfaz (7.20) então  $-\Delta u = f$  em  $\Omega$ . De fato, podemos aplicar de volta a fórmula de Lagrange-Green obtendo  $\int_{\Omega} (-\Delta u - f) \phi = 0$  para toda  $\phi \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$ ; como

$(-\Delta u - f)$  é contínua, se fosse  $(-\Delta u - f)(p) > 0$  existiria  $B_\varepsilon(p)$  na qual é ainda positiva; tomando  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  não negativa e com suporte em  $B_\varepsilon(p)$  (por exemplo uma translação da função  $\eta_\varepsilon$  de (7.15)) obteríamos  $\int_\Omega (-\Delta u - f)\phi > 0$ , contradição; o mesmo se  $(-\Delta u - f)(p) < 0$ .

A definição acima pode ser generalizada mais ainda, de fato o termo da direita  $\int_\Omega f\phi$  com  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  pode ser visto como um funcional linear sobre  $C_0^\infty(\Omega)$ , podemos então definir solução no sentido das distribuições de  $-\Delta u = F$  para qualquer  $F$  funcional linear sobre  $C_0^\infty(\Omega)$ , apenas pedindo  $-\int_\Omega u\Delta\phi = F(\phi)$  para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ .

De particular interesse é o caso em que escolhemos o funcional linear

$$\delta_p : C_0^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} : \phi \mapsto \phi(p).$$

**Definição 7.26.** Chamamos **solução fundamental de pólo  $p$**  (para o Laplaciano), uma função  $\psi_p$  que seja solução no sentido das distribuições de

$$-\Delta\psi_p = \delta_p.$$

Isso significa que

$$\psi_p \in L^1_{loc}(\Omega) \quad e \quad - \int_\Omega \psi_p \Delta\phi = \phi(p) \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Observe que, se existir uma solução fundamental de pólo  $p$  que seja de classe  $C^2$  em  $\Omega \setminus \{p\}$ , então

$$- \int_\Omega \psi_p \Delta\phi = 0 \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{p\}),$$

logo, operando como antes, ela satisfará  $-\Delta\psi_p = 0$  em  $\Omega \setminus \{p\}$ .

Usaremos isso para procurar uma solução fundamental supondo (por simetria) que seja radial-simétrica com respeito ao pólo; poremos  $p = 0$  para simplificar.

Se  $\psi(x) = \tilde{\psi}(|x|)$  e  $\Delta\psi = 0$  então  $\tilde{\psi}(\rho)$  satisfaz  $\tilde{\psi}'' + \frac{n-1}{\rho}\tilde{\psi}' = 0$  para  $\rho > 0$ , resolvendo obtemos

$$\tilde{\psi}(\rho) = \begin{cases} C\rho^{2-n} + D & \text{se } n \geq 3, \\ C \ln(\rho) + D & \text{se } n = 2, \\ C\rho + D & \text{se } n = 1. \end{cases} \tag{7.21}$$

Como procuramos  $\psi \in L^1_{loc}(\Omega)$  não importa o valor na origem, importa apenas verificar a integrabilidade perto da singularidade:  $\int_{B_R(0)} \psi = \omega_n \int_0^R \tilde{\psi}(\rho)\rho^{n-1}d\rho < \infty$ .

Verificaremos que, para um valor oportuno de  $C$ , (7.21) é realmente uma solução fundamental. Isso será consequência da seguinte proposição.

**Proposição 7.27.** Se

$$\psi(y) = \begin{cases} \frac{|y|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} + D & \text{para } n \geq 3, \\ -\frac{\ln(|y|)}{2\pi} + D & \text{para } n = 2, \\ -\frac{|y|}{2} + D & \text{para } n = 1, \end{cases} \tag{7.22}$$

$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  e  $0 \in \Omega$  então

$$\int_\Omega \psi \Delta u = \int_{\partial\Omega} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot n - u(0). \tag{7.23}$$

*Demonstração.* Seja  $B = B_\varepsilon(0)$ :

$$\int_{\Omega \setminus B} \psi \Delta u = \int_{\Omega \setminus B} u \Delta \psi + \int_{\partial \Omega} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot n - \int_{\partial B} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot n \quad (7.24)$$

onde

$$- \int_{\partial B} (\psi \nabla u - u \nabla \psi) \cdot n = -\tilde{\psi}(\varepsilon) \int_{\partial B} \nabla u \cdot n + \tilde{\psi}'(\varepsilon) \int_{\partial B} u.$$

Considerando o caso  $n \geq 3$  temos

$$\tilde{\psi}(\varepsilon) \int_{\partial B} \nabla u \cdot n = (C\varepsilon^{2-n} + D) \int_B \Delta u = (C\varepsilon^{2-n} + D) \frac{\omega_n}{n} \varepsilon^n \int_B \Delta u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

já que  $\Delta u$  é contínua em zero. Analogamente

$$\tilde{\psi}'(\varepsilon) \int_{\partial B} u = C(2-n)\varepsilon^{1-n}\omega_n\varepsilon^{n-1} \int_{\partial B} u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} C(2-n)\omega_n u(0);$$

concluimos (7.23) de (7.24) tomando limite para  $\varepsilon \rightarrow 0$  e escolhendo  $C = -\frac{1}{(2-n)\omega_n}$ , para todo  $D$ . Nos casos  $n = 1, 2$  precisa apenas repetir as contas para encontrar o valor apropriado de  $C$ .  $\square$

Consequência imediata de (7.23) é que se  $u = \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$  então o termo de borda é nulo e  $-\int_\Omega \psi \Delta \phi = \phi(0)$ , logo  $\psi$  é realmente solução fundamental de pólo 0. Por outro lado, temos o seguinte corolário:

**Corolário 7.28.** *Se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  então*

$$u(x) = \int_\Omega \psi(y-x)[- \Delta u(y)] + \int_{\partial \Omega} [\psi(y-x)\nabla u(y) - u(y)\nabla \psi(y-x)] \cdot n. \quad (7.25)$$

e isso vale para todo  $x \in \Omega$ .

*Demonstração.* A equação (7.23) pode ser escrita como

$$u(0) = \int_\Omega \psi(y)[- \Delta u(y)] + \int_{\partial \Omega} [\psi(y)\nabla u(y) - u(y)\nabla \psi(y)] \cdot n; \quad (7.26)$$

pela invariância com respeito às translações,  $\psi_x(y) = \psi(y-x)$ , logo de (7.26) e escolhendo o ponto  $x \in \Omega$  como pólo no lugar de 0, obtemos (7.25).  $\square$

**Observação 7.29** (Importante!). A equação (7.25) exprime  $u$  em  $\Omega$  em função do valor do seu Laplaciano em  $\Omega$  e de seu valor e derivada normal em  $\partial \Omega$ . Isso não significa que os três dados podem ser escolhidos arbitrariamente, pois já vimos no exercício 7.1 e nos resultados de unicidade para o problema de Dirichlet que isso não pode ser feito: definindo  $u$  pela (7.25) pondo funções arbitrárias no lado direito dará em geral uma função que não satisfaz os dados prescritos. Dizemos que (7.25) é apenas uma *fórmula de representação* de uma eventual solução, não uma fórmula explícita para obter a solução.



**Observação 7.30.** Usando a solução fundamental  $\psi$  podemos obter uma demonstração alternativa da propriedade do valor médio: escolhendo a constante  $D$  em (7.22) de maneira que  $\psi|_{\partial B_r(0)} = 0$ , (7.25) torna-se

$$u(x_0) = \int_{B_r(x_0)} \psi(y - x_0)[- \Delta u(y)] + \int_{\partial B_r(x_0)} [-u(y)\nabla\psi(y - x_0)] \cdot n : \quad (7.27)$$

se  $\Delta u = 0$  então

$$u(x_0) = \int_{\partial B_r(x_0)} [-u(y)\nabla\psi(y - x_0)] \cdot n = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u.$$

◁

De (7.25) deduzimos algumas fórmulas relativas a casos particulares:

- se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  é harmônica em  $\Omega$  então

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} [\psi(y - x)\nabla u(y) - u(y)\nabla\psi(y - x)] \cdot n ; \quad (7.28)$$

- se  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$  é solução do problema de Dirichlet (7.5)

$$u(x) = \int_{\Omega} \psi(y - x)f(y) + \int_{\partial\Omega} [\psi(y - x)\nabla u(y) - g(y)\nabla\psi(y - x)] \cdot n ; \quad (7.29)$$

- se é solução do problema de Neumann (7.6)

$$u(x) = \int_{\Omega} \psi(y - x)f(y) + \int_{\partial\Omega} \psi(y - x)h(y) - [u(y)\nabla\psi(y - x) \cdot n] ; \quad (7.30)$$

- se  $u \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$  ou  $u \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$  (suporte compacto), então

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y - x)[- \Delta u(y)]. \quad (7.31)$$

Mostremos agora uma proposição que é quase uma recíproca desta última equação:

**Proposição 7.31.** Se  $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$  e definimos

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y - x)f(y),$$

então  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$  e  $-\Delta u = f$  em  $\mathbb{R}^n$ .

*Demonstração.* Escrevendo

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z)f(z + x),$$

podemos passar as derivadas com respeito a  $x$  dentro da integral, assim  $u_{x_i}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) f_{x_i}(z+x)$ , e

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z) [-\Delta f(z+x)];$$

isso já mostra que  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ ; mudando de novo de variáveis e usando (7.31) concluímos

$$-\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y-x) [-\Delta f(y)] = f(x).$$

□

Para o caso de um domínio  $\Omega$  (mas sem pedir condições na borda) vale o seguinte:

**Proposição 7.32.** *Se  $f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  e definimos*

$$u(x) := \int_{\Omega} \psi(y-x) f(y),$$

então  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  e  $-\Delta u = f$  em  $\Omega$ .

*Ideia da demonstração.* Se  $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$  então a proposição 7.31 nos fornece imediatamente a solução pois  $f$  estende a uma função em  $\mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$  e  $u|_{\Omega}$  satisfaz  $-\Delta u = f$  em  $\Omega$ .

O caso geral pode ser feito aproximando  $f$  por funções em  $\mathcal{C}_0^2(\Omega)$  (técnica de cut-off) : veja [JN] pag 99-100. □

### 7.5.1 Função de Green

O corolário 7.28 fornece a fórmula (7.25), que envolve a solução fundamental de pólo  $x$  dada por  $\psi_x(y) = \psi(y-x)$ , onde  $\psi$  é dada por (7.22).

Observe porém que se  $w$  é harmônica em  $\Omega$  e  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  então

$$\int_{\Omega} w(y) [-\Delta u(y)] + \int_{\partial\Omega} [w(y) \nabla u(y) - u(y) \nabla w(y)] \cdot n = 0. \quad (7.32)$$

pela identidade de Lagrange-Green (7.9); isso mostra que (7.25) continua valendo para qualquer solução fundamental, isto é, substituindo  $\psi$  por  $\psi + w$ . Além disso, podemos somar uma  $w$  diferente para cada pólo  $x$  considerado, logo podemos escolher a solução fundamental mais vantajosa para cada pólo.

Para obter uma fórmula explícita para a (eventual) solução do problema de Dirichlet (7.5) precisaríamos eliminar da fórmula (7.29) o termo  $\int_{\partial\Omega} [\psi(y-x) \nabla u(y)] \cdot n$ , logo procuramos para todo  $x \in \Omega$  uma função  $w_x(y)$  harmônica de maneira que  $G(y, x) := \psi(y-x) - w_x(y)$  satisfaça

–  $G(\cdot, x)$  é solução fundamental de pólo  $x$ ,

–  $G(y, x) = 0$  para  $y \in \partial\Omega$ ;

desta maneira, usando  $G$  no lugar de  $\psi$  em (7.29) desaparecerá o termo de borda que envolve  $u_n$ , nos dando a seguinte fórmula que depende apenas do valor do Laplaciano e do dado de Dirichlet:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(y, x) [-\Delta u(y)] - \int_{\partial\Omega} [u(y) \nabla_y G(y, x)] \cdot n. \quad (7.33)$$

$$= \int_{\Omega} G(y, x) [f(y)] - \int_{\partial\Omega} [g(y) \nabla_y G(y, x)] \cdot n \quad (7.34)$$

A função  $w_x$  que procuramos deve satisfazer

$$\begin{cases} -\Delta w_x(y) = 0 & \text{em } \Omega, \\ w_x(y) = \psi(y-x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.35)$$

admitindo que exista a solução deste problema de Dirichlet, a função  $G$  obtida é chamada **função de Green para a região  $\Omega$** ; vale então

**Teorema 7.33.** *Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  é solução do problema de Dirichlet (7.5), então  $u$  é dado pela fórmula (7.34).*

**Observação 7.34.** Observe que o teorema 7.33 ainda não garante a existência de uma solução do problema de Dirichlet, pois apenas diz que se existir uma solução, ela deve satisfazer a fórmula, não que pondo as funções  $f$  e  $g$  na fórmula obtemos uma solução! Isso deverá ser verificado, como fizemos no caso da equação da onda na demonstração do teorema 6.16. (veja por exemplo as proposições 7.40-7.41 e 7.45-7.46 para os casos de um semiespaço e de uma bola).

Além disso, apenas assumimos a existência da função de Green, mas isso também depende da existência de uma solução de (7.35).

Historicamente, a existência da função de Green era assumida sem demonstração baseando-se na analogia eletrostática: se  $n = 3$ ,  $G(\cdot, x)$  corresponde ao potencial eletrostático gerado por uma carga pontiforme posta no ponto  $x \in \Omega$ , quando  $\partial\Omega$  é um condutor (logo o potencial pode ser assumido igual a zero em  $\partial\Omega$ ).  $\triangleleft$

Separando as duas parcelas da (7.34) obtemos a **fórmula integral de Green**, para a solução do problema de Dirichlet homogêneo para a equação de Poisson:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(y, x)[f(y)] \quad (7.36)$$

e a **fórmula integral de Poisson**, para a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} [g(y)\nabla_y G(y, x)] \cdot n; \quad (7.37)$$

a função  $H(y, x) = -\nabla_y G(y, x) \cdot n = -\frac{\partial G}{\partial n_y}(y, x)$  (com  $x \in \Omega$  e  $y \in \partial\Omega$ ) é dita **Núcleo de Poisson** para a região  $\Omega$ .

*Exercício 7.35.* Usando a fórmula da solução fundamental (7.22), calcule a função de Green e o núcleo de Poisson em dimensão um, para  $\Omega = (0, 1)$ .  $\triangleleft$

Vejamos algumas propriedades da função de Green:

**Proposição 7.36.** *Para todos  $x, y \in \Omega$  com  $x \neq y$  vale  $G(y, x) > 0$ .*

*Demonstração.* Fixado  $x \in \Omega$  temos que  $\Delta_y G = 0$  em  $\Omega \setminus B$  onde  $B = B_\varepsilon(x)$ . Como  $G$  é a soma da solução fundamental de pólo  $x$  (veja (7.22)) com a função contínua  $w_x$ , se  $n \geq 2$  vale  $G(y, x) \rightarrow +\infty$ , quando  $y \rightarrow x$ , logo se  $\varepsilon > 0$  é suficientemente pequeno  $G(y, x)$  vale zero se  $y \in \partial\Omega$  e vale algo positivo se  $y \in \partial B$ . Pelo princípio de máximo forte  $G(\cdot, x)$  não pode assumir seu mínimo em  $\Omega \setminus B$ , logo é positiva em  $\Omega \setminus B$ ; pela arbitrariedade de  $\varepsilon$  obtemos a tese. O caso  $n = 1$  pode ser verificado diretamente já que a função de Green pode ser calculada.  $\square$

**Proposição 7.37.**  $G(y, x) = G(x, y)$  para todo  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ .

*Demonstração.* Fixados  $x, y \in \Omega$ ,  $x \neq y$ , sejam  $B_x$  e  $B_y$  bolas de raio  $\varepsilon > 0$  e centros  $x$  e  $y$ , respectivamente, contidas em  $\Omega$  e disjuntas.

Temos  $\Delta_z G(z, x) = 0 = \Delta_z G(z, y)$  em  $\Omega \setminus (B_x \cup B_y)$ , logo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus (B_x \cup B_y)} \Delta_z G(z, y) G(z, x) - \Delta_z G(z, x) G(z, y) = \\ &= \int_{\partial[\Omega \setminus (B_x \cup B_y)]} [\nabla_z G(z, y) G(z, x) - \nabla_z G(z, x) G(z, y)] \cdot n; \end{aligned}$$

como  $G$  é nula em  $\partial\Omega$  sobra apenas

$$0 = \int_{\partial B_x \cup \partial B_y} [\nabla_z G(z, y) G(z, x) - \nabla_z G(z, x) G(z, y)] \cdot n,$$

onde  $n$  aponta dentro das esferas.

Considerando a bola de centro  $x$ , como  $G(z, y)$  e  $w_x(z) = \psi(z-x) - G(z, x)$  são harmônicas nela, temos

$$\int_{\partial B_x} [\nabla_z G(z, y) G(z, x) - \nabla_z G(z, x) G(z, y)] \cdot n = \int_{\partial B_x} [\nabla_z G(z, y) \psi(z-x) - \nabla_z \psi(z-x) G(z, y)] \cdot n.$$

Agora, explicitando  $\psi$  e fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  obtemos, como na demonstração da proposição 7.27, que isso vale  $-G(x, y)$  (lembre que  $n$  é a normal interior à esfera).

Juntando as integrais nas duas esferas obtemos

$$0 = \int_{\partial B_x \cup \partial B_y} [\nabla_z G(z, y) G(z, x) - \nabla_z G(z, x) G(z, y)] \cdot n \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -G(x, y) + G(y, x);$$

logo  $G(x, y) = G(y, x)$ . □

**Observação 7.38.** A proposição 7.36 mostra que o princípio de máximo implica na positividade da função de Green. Viceversa, pode-se mostrar que a positividade da função de Green implica no princípio de máximo forte.

De fato, se  $u|_{\partial\Omega} = 0$  então

$$u(x) = \int_{\Omega} G(y, x) [-\Delta(y)] : \tag{7.38}$$

se  $-\Delta \leq 0$  e  $G > 0$  então  $u \leq 0$  (máximo na fronteira); se além disso  $-\Delta < 0$  num conjunto de medida positiva então  $u < 0$  em todo  $\Omega$ , isto é, se  $u$  é nula num ponto interior então  $-\Delta \equiv 0$  e logo  $u$  é identicamente nula.

**Observação 7.39.** Algo análogo ao que fizemos nesta seção, pode ser feito para obter uma fórmula explícita para a solução do problema de Neumann para a equação  $-\Delta u + cu = 0$  com  $c > 0$  (mostre que para este problema pode ser mostrada a unicidade da eventual solução). O que precisa fazer é procurar uma *função de Neumann*  $N_c(y, x)$  que seja solução fundamental para o operador  $-\Delta u + cu$  de pólo  $x$  e que tenha derivada normal nula em  $\partial\Omega$ .

## 7.6 Solução do problema de Dirichlet

Já vimos que, pela linearidade, para resolver (7.5) podemos resolver separadamente

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.39)$$

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.40)$$

e somar as soluções.

Por outro lado, pode-se mostrar que seria suficiente saber resolver um destes dois problemas para também poder resolver o outro: suponha que saibamos resolver (7.40) e queremos resolver (7.39): é suficiente encontrar uma função  $\widehat{g} \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$  tal que  $\widehat{g}|_{\partial\Omega} = g$  e resolver

$$\begin{cases} -\Delta w = \Delta \widehat{g} & \text{em } \Omega, \\ w(x) = 0 & \text{em } \partial\Omega; \end{cases} \quad (7.41)$$

a solução de (7.39) será então  $u = w + \widehat{g}$ .

Viceversa, suponha que saibamos resolver (7.39) e queremos resolver (7.40): é suficiente encontrar uma função  $\rho \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  tal que  $-\Delta\rho = f$  (sem pedir condição de fronteira) e resolver

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{em } \Omega, \\ w(x) = -\rho & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.42)$$

e a solução de (7.40) será então  $u = w + \rho$ .

A única dificuldade técnica desse processo é verificar se e quando podemos encontrar as funções  $\widehat{g}$  e  $\rho$  (observe que o segundo problema é parecido ao da proposição 7.32).

### 7.6.1 Solução do problema de Dirichlet num semiespaço

Nesta seção usaremos as fórmulas de Green e de Poisson para encontrar uma solução num semiespaço.

Observe que a fórmula (7.34) foi desenvolvida usando a identidade de Lagrange-Green, logo para domínios limitados; mesmo assim, verificaremos no final que o resultado obtido dará mesmo uma solução. O motivo de trabalhar no semiespaço é que poderemos aproveitar as simetrias para calcular facilmente a função de Green.

Seja então  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$  e dado  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  definamos  $x^* = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ : o simétrico de  $x$  com respeito a  $\Gamma$ .

Observe que para o Problema de Dirichlet em  $\Omega$  não temos sequer unicidade de solução: de fato  $u(x) = kx_n$  satisfaz  $-\Delta u = 0$  em  $\Omega$  e  $u = 0$  em  $\partial\Omega$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ ; apenas uma delas porém é limitada.

Afirmamos que a **função de Green para o semiespaço  $\Omega$**  é

$$G(y, x) = \psi(y - x) - \psi(y - x^*); \quad (7.43)$$

de fato, por simetria,  $\psi(y-x) - \psi(y-x^*)|_{y \in \Gamma} = 0$  e como se  $x \in \Omega$  então  $x^* \notin \Omega$ , temos que  $\psi(y-x^*)$  é harmônica em  $\Omega$  e logo  $G(\cdot, x)$  é uma solução fundamental de pólo  $x$ .

(Verifique pela definição acima que vale  $G(y, x) = G(x, y)$  e  $G(x, y) > 0$  em  $\Omega$ , como mostramos nas proposições 7.36 e 7.37).

Definamos então  $u_f$  e  $u_g$  pelas (7.36) e (7.37), isto é,

$$u_f(x) = \int_{\Omega} G(y, x)[f(y)], \quad u_g(x) = - \int_{\partial\Omega} [g(y)\nabla_y G(y, x)] \cdot n; \quad (7.44)$$

podemos explicitar melhor a segunda fórmula calculando o núcleo de Poisson

$$H(y, x) = -\nabla_y G(y, x) \cdot (-e_n) = \partial_{y_n} G(y, x) = \partial_{y_n} [\psi(y-x) - \psi(y-x^*)].$$

No caso  $n \geq 3$

$$\begin{aligned} \partial_{y_n} \psi(y-x) &= \partial_{y_n} \frac{|y-x|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} = -\frac{|y-x|^{1-n} y_n - x_n}{\omega_n |y-x|} \\ \partial_{y_n} \psi(y-x^*) &= \partial_{y_n} \frac{|y-x^*|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} = -\frac{|y-x^*|^{1-n} y_n + x_n}{\omega_n |y-x^*|} \end{aligned}$$

quando  $y_n = 0$  os dois são opostos, logo, para  $y \in \Gamma$

$$H(y, x) = 2 \frac{|y-x|^{-n}}{\omega_n} x_n :$$

Este é o **núcleo de Poisson para o semiespaço**. Concluimos que podemos escrever

$$u_g(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|y-x|^n}. \quad (7.45)$$

Verifiquemos agora que  $u_f + u_g$  é realmente solução de (7.5) quando  $\Omega$  é o semiespaço; como anteriormente suporemos para simplificar  $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$  mas o resultado pode ser obtido com condições mais fracas.

**Proposição 7.40.** *Se  $f \in \mathcal{C}_0^2(\Omega)$  então  $u_f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$  e satisfaz  $-\Delta u_f = f$  em  $\Omega$  e  $u_f = 0$  em  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Como o suporte é compacto podemos pensar as integrações em  $\mathbb{R}^n$ ; fazendo com na demonstração da proposição 7.31 temos, para todo  $x \in \Omega$ ,

$$-\Delta_x \int_{\Omega} \psi(y-x)f(y) = f(x)$$

e

$$-\Delta_x \int_{\Omega} \psi(y-x^*)f(y) = f(x^*) = 0,$$

logo  $-\Delta u_f = f$ .

Enfim,  $u_f = 0$  em  $\Gamma$  pois, pela simetria de  $G$  (ou diretamente da fórmula (7.43)), tem-se  $G(y, x) = 0$  para todo  $y \in \Omega$  se  $x \in \Gamma$ .

□

**Proposição 7.41** ([EV]p38 [FL]p94). Se  $g \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$  e é limitada, então  $u_g \in C^\infty(\Omega)$ , é limitada, satisfaz  $-\Delta u_g = 0$  em  $\Omega$  e  $\lim_{x \rightarrow \Gamma} u_g = g$ .

*Demonstração.* a)  $H(y, x)$  é harmônico na variável  $x \in \Omega$  para todo  $y \in \Gamma$ .

De fato, se  $x \in \Gamma$  então  $G(y, x) = \psi(y - x) - \psi(y - x^*)$  é harmônico na variável  $y$  exceto nos pontos  $x, x^*$ ; pela simetria de  $G$  o mesmo vale na variável  $x$  se  $y \neq x, x^*$ . Logo também  $H = \partial_{y_n} G$  é harmônica.

b) Queremos mostrar que

$$\frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\Gamma} \frac{1}{|y - x|^n} dy = 1.$$

Escrevendo como uma integral em  $\mathbb{R}^{n-1}$  e passando a coordenadas polares (centradas em  $(x_1, \dots, x_{n-1})$ ) obtemos

$$\frac{2x_n}{\omega_n} \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{1}{(x_n^2 + \rho^2)^{n/2}} \rho^{n-2} d\rho;$$

mudando a variável  $\rho = x_n r$  conseguimos cortar  $x_n$  da expressão obtendo:

$$\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^{n/2}} r^{n-2} dr;$$

observe que a integral converge pois o comportamento na origem é como  $r^{n-2}$  e no infinito como  $r^{-2}$ .

Pondo agora  $r = \tan \theta$  obtemos

$$\frac{2\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta = 1,$$

pois  $\omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(\theta) d\theta$  corresponde a integrar as medidas das esferas em  $\mathbb{R}^{n-1}$  de raio  $\sin(\theta)$  com  $\theta \in [0, \pi/2]$ , logo corresponde à medida de uma semiesfera em  $\mathbb{R}^n$  de raio 1.

c) Pelo ponto (b), se  $g$  é limitada então  $u_g$  é limitada, também é harmônica (logo  $C^\infty$ ) em  $\Omega$  pelo ponto (a).

d) Condição em  $\Gamma$ : seja  $x_0 \in \Gamma$ , precisamos estimar  $|u(x) - g(x_0)|$ .

Usando o ponto (b) e em seguida o fato que  $H(y, x) > 0$  (veja pela fórmula) estimamos

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\Gamma} H(y, x) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \\ &\leq \int_{\Gamma \cap B_\delta} H(y, x) |g(y) - g(x_0)| + \int_{\Gamma \setminus \overline{B_\delta}} H(y, x) |g(y) - g(x_0)| \end{aligned} \quad (7.46)$$

onde  $B_\delta := B_\delta(x_0)$ .

Dado  $\varepsilon > 0$  escolhamos  $\delta > 0$  (pela continuidade de  $g$ ) tal que  $y \in B_\delta \Rightarrow |g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ , desta maneira a primeira integral em (7.46) é menor que  $\varepsilon$ .

Agora, seja  $|x - x_0| < \delta/2$ ; isso com  $|y - x_0| \geq \delta$  implica  $|x - y| \geq |y - x_0|/2$ , logo

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \overline{B_\delta}} H(y, x) |g(y) - g(x_0)| &\leq \frac{2x_n}{\omega_n} 2 \|g\|_\infty \int_{\Gamma \setminus \overline{B_\delta}} \frac{1}{|x - y|^n} \\ &\leq \frac{2x_n}{\omega_n} 2 \|g\|_\infty \int_{\Gamma \setminus \overline{B_\delta}} \frac{2^n}{|x_0 - y|^n}; \end{aligned}$$

a integral acima converge pois tem o mesmo comportamento de  $\int_\delta^\infty \rho^{n-2} \rho^{-n} d\rho$  onde  $\delta$  já foi fixado.

Concluimos que

$$\int_{\Gamma \setminus \overline{B_\delta}} H(y, x) |g(y) - g(x_0)| \leq C_{g,n,\delta} x_n \rightarrow 0$$

quando  $x \rightarrow x_0$ ; juntando as duas componentes de (7.46) deduzimos que  $|u(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon$  para  $x$  suficientemente perto de  $x_0$ , logo pela arbitrariedade de  $\varepsilon$  tende a zero.  $\square$

As duas proposições acima nos dão o primeiro resultado de existência para o problema de Dirichlet (7.5):

**Teorema 7.42.** *Se  $\Omega$  é um semiespaço em  $\mathbb{R}^n$ ,  $f \in C_0^2(\Omega)$  e  $g \in C^0(\mathbb{R}^{n-1})$  é limitada, então existe uma solução  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  do problema de Dirichlet (7.5). A solução é dada pela soma das (7.44).*

## 7.6.2 Solução do problema de Dirichlet numa bola

Para a bola podemos de novo explorar as simetrias para calcular a Função de Green e o Núcleo de Poisson, obtendo uma solução do problema de Dirichlet

Seja  $B = B_1(0)$  e seja, para todo  $x \in B \setminus \{0\}$ ,  $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ , isto é, um ponto fora da bola, na mesma radial e tal que  $|x||x^*| = 1$ .

Primeiramente, vale o seguinte:

**Lema 7.43.** *Com a definição acima,*

$$|x||y - x^*| = |y||x - y^*|;$$

em particular,

$$\text{se } |y| = 1 \text{ então } |x||y - x^*| = |x - y|.$$

*Demonstração.* Trivialmente

$$|x|^2 \left( |y|^2 + \frac{|x|^2}{|x|^4} - 2 \frac{x \cdot y}{|x|^2} \right) = |x|^2 |y|^2 + 1 - 2x \cdot y = |y|^2 \left( |x|^2 + \frac{|y|^2}{|y|^4} - 2 \frac{x \cdot y}{|y|^2} \right)$$

e extremo corresponde ao quadrado dos termos que afirmamos ser iguais.

No caso  $|y| = 1$  é suficiente usar o fato que então  $y = y^*$ .

A prova pode também ser feita geometricamente: comparando os triângulos  $0xy^*$  e  $0yx^*$  temos um ângulo comum e  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|y^*|}{|x^*|}$ , logo  $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x - y^*|}{|y - x^*|}$ .  $\square$



Por consequência podemos mostrar

**Lema 7.44.** *Se  $x \in B \setminus \{0\}$  a função  $\psi(|x|(y - x^*))$  é harmônica na variável  $y$  em  $B$  e vale  $\psi(y - x)$  para  $y \in \partial B$ .*

*Demonstração.* Como  $\psi$  é harmônica exceto no pólo, trasladando e re-escalando continua harmônica, exceto em  $x^*$  que não está em  $B$ .

Como  $\psi$  é radial e  $y \in \partial B$  implica  $|x||y - x^*| = |x - y|$ , obtemos a segunda afirmação.  $\square$

Logo para todo  $x \in B \setminus \{0\}$  a função

$$G(y, x) := \psi(y - x) - \psi(|x|(y - x^*))$$

é solução fundamental de pólo  $x$  e é nula em  $\partial B$ , logo é a **função de Green para  $B$** ; para o caso  $x = 0$  é suficiente tomar  $G(y, 0) := \psi(y) - \tilde{\psi}(1)$ . Calculando  $\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(y, x)|_{y \in \partial B}$  obtemos o **núcleo de Poisson para  $B$**  (se  $n \geq 2$ ):

$$H(y, x) = \frac{1 - |x|^2}{\omega_n |y - x|^n}.$$

Com isso podemos fazer como no caso do semiespaço definindo

$$u_f(x) = \int_B G(y, x)[f(y)], \quad u_g(x) = - \int_{\partial B} [g(y)\nabla_y G(y, x)] \cdot n; \quad (7.47)$$

e ainda precisará mostrar que  $u_f + u_g$  é realmente solução do problema de Dirichlet (7.5) em  $B$ , em particular

**Proposição 7.45.** *Se  $f \in C_0^2(B)$  então  $u_f \in C^2(\overline{B})$  e satisfaz  $-\Delta u_f = f$  em  $B$  e  $u_f = 0$  em  $\partial B$ .*

**Proposição 7.46** ([EV] p41 ). *Se  $g \in C^0(\partial B)$  então  $u_g \in C^\infty(B)$  e satisfaz  $-\Delta u_g = 0$  em  $B$  e  $\lim_{x \rightarrow \partial B} u_g = g$ .*

As demonstrações seguem os mesmos princípios das das proposições 7.40 e 7.41, adaptando as contas.

As duas proposições acima nos dão o resultado de existência para o problema da Dirichlet (7.5) na bola:

**Teorema 7.47.** *Se  $B = B_1(0)$ ,  $f \in C_0^2(B)$  e  $g \in C^0(\partial B)$ , então existe uma solução  $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$  do problema da Dirichlet (7.5) em  $B$ . A solução é dada pela soma das (7.47).*

**Observação 7.48.** No caso de bolas de raio diferente é suficiente mudar de variável e usar a mesma fórmula.  $\triangleleft$

### 7.6.3 Método de Perron

Nas seções anteriores obtivemos condições para existência de uma solução para o problema de Dirichlet para a equação de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (7.48)$$

nos casos em que  $\Omega$  é um semiespaço ou uma bola.

O resultado para  $\Omega$  limitados mais gerais pode ser obtido pelo Método de Perron: veja por exemplo em [JN] e [GT]. Cabe destacar que o método de Perron usa o resultado de existência na Bola, assim não substitui a teoria da seção anterior mas é consequência dela.

Descrevemos a seguir o resultado:

**Definição 7.49.** Dado  $p \in \partial\Omega$  uma **função barreira em  $p$  com respeito a  $\Omega$**  é uma função:

- $b \in C^0(\bar{\Omega})$ ,
- $b$  superharmônica em  $\Omega$ .
- $b > 0$  em  $\bar{\Omega} \setminus \{p\}$ ,  $b(p) = 0$ .

Dizemos que  $p \in \partial\Omega$  é um **ponto regular** se existe uma função barreira em  $p$  com respeito a  $\Omega$ .

**Observação 7.50.** Apesar de não ser evidente pela definição, a noção de ponto regular é apenas local: de fato se  $N$  é uma vizinhança de  $p$  e  $b$  é uma função barreira em  $p$  com respeito a  $\Omega \cap N$ , então é possível construir uma função barreira em  $p$  com respeito a  $\Omega$  da seguinte forma: dadas bolas  $B_1 \subset\subset B_2 \subset\subset N$ , se  $i = \inf b|_{\bar{B}_2 \setminus B_1} > 0$  então definimos

$$\tilde{b}(x) = \begin{cases} \min \{i, b(x)\} & \text{em } \bar{\Omega} \cap B_1 \\ i & \text{em } \bar{\Omega} \setminus B_1. \end{cases}$$

(Verifique que  $\tilde{b}(x)$  é função barreira). ◁

**Observação 7.51.** Uma condição suficiente para  $p \in \partial\Omega$  ser regular é a *condição da esfera exterior*:

$$\text{existe } B_R(y) : \overline{B_R(y)} \cap \bar{\Omega} = \{p\}$$

*Demonstração da condição da esfera exterior.* É suficiente escolher (para  $n \geq 3$ ) a função barreira

$$b(x) = R^{2-n} - |x - y|^{2-n} :$$

é zero em  $p$ , positiva fora da bola e harmônica exceto em  $y$ . ◻

Esta condição não é necessária, apenas muito mais simples de verificar. O que o conjunto  $\Omega$  não pode mesmo ter é certas cúspides que entram no domínio ou fronteiras que tenham  $\Omega$  dos dois lados. ◁

O método de Perron permite provar o seguinte teorema.

**Teorema 7.52.** Se  $\Omega$  é um domínio limitado, vale a seguinte equivalência: existe solução de (7.48) para toda  $g \in C^0(\partial\Omega)$  se e só se todos os pontos de  $\partial\Omega$  são regulares.

### 7.6.4 Resultados de regularidade

Nas proposições 7.31 e 7.32 mostramos resultados do tipo: “se  $f \in \mathcal{C}^2$   $u$  é solução de  $-\Delta u = f$  então  $u \in \mathcal{C}^2$ ”. Intuitivamente, sendo a equação de ordem 2, seria de esperar que  $f \in \mathcal{C}^k$  implicasse  $u \in \mathcal{C}^{k+2}$ , mas isso não vale em geral (exceto no caso  $n = 1$  onde é trivial), pois o Laplaciano envolve apenas as derivadas segundas nas direções  $x_i$ , mas não controla as derivadas mistas. Para obter regularidade  $\mathcal{C}^{k+2}$  na solução precisa um pouco mais que  $\mathcal{C}^k$  para  $f$ .

Em particular vale o seguinte resultado:

**Lema 7.53** ([GT] pag 55 Lema 4.2 (e 4.1)). *Se  $f \in \mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$  ( $\alpha \in (0,1)$ ) e é limitada, então para a função  $u_f(x) := \int_{\Omega} \psi(y-x)f(y)$  da proposição 7.32, vale  $u_f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ ,  $-\Delta u = f$  em  $\Omega$ . Além disso, se  $\Omega$  é limitado  $u_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ .*

O espaço  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  é o espaço das funções  $\alpha$ -Hölder contínuas, isto é, tais que existe  $C > 0$  tal que  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha$  para  $x, y \in \Omega$ .

Juntando o lema com o método de Perron, obtemos

**Teorema 7.54** ([GT] pag 56 teorema 4.3). *Se  $\Omega$  é limitado,  $\partial\Omega$  é regular (no sentido do método de Perron),  $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$  e é limitada,  $g \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$ , então existe e é única a solução  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$  do problema de Dirichlet (7.5)*

*Demonstração.* A  $u_f$  do lema anterior é de classe  $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$ , logo apenas falta obter  $u = u_f + v$  onde  $v$  é obtida, via método de Perron, resolvendo o problema (7.48) com  $v|_{\partial\Omega} = g - u_f$ .  $\square$

**Observação 7.55.** Um exemplo de uma função  $\mathcal{C}^0$  que não é  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  para nenhum  $\alpha > 0$  é

$$\begin{cases} \frac{1}{|\ln \rho|} & \text{se } \rho > 0, \\ 0 & \text{se } \rho = 0. \end{cases}$$

### Bibliografia do capítulo

- Capítulo em geral:  
principal: [EV] páginas 20...28,33...43, [JN] páginas 94..110;  
veja também: [FL] páginas 66...98.  
Se quiser ler mais:[JN] páginas 111...125, [EV] páginas 28...33, [GT] páginas 23..26.
- Seção 7.5:  
[JN] páginas 89...92. ,



# Capítulo 8

## Equação do calor

Neste capítulo estudaremos a equação do calor

$$u_t - \Delta_x u = F(x, t), \quad (8.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t \in \mathbb{R}$ : geralmente interpretamos  $t$  como o tempo e diremos então que (8.1) é a equação do calor em dimensão  $n$ .

Como no capítulo 6, quando não especificado, assumiremos os operadores  $\nabla$ ,  $\Delta$  e  $div$  agindo apenas nas variáveis em  $\mathbb{R}^n$  e  $\partial_t$  na última variável em  $\mathbb{R}$ .

Como vimos no capítulo 4, a equação (8.1) é sempre parabólica e as superfícies características são as superfícies  $t = const$ .

Consideraremos em geral um problema da forma

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x, t), \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (8.2)$$

Observe que a superfície  $t = 0$  é característica para a equação (não podemos obter  $u_{tt}$  da equação) e que o problema (8.2) não é um problema de Cauchy, já que não fixamos  $u_t$ . O fato de fixar apenas  $u$  é coerente com o fato que a equação é de primeira ordem na variável  $t$ .

Um modelo físico que esta equação representa é o da difusão de uma substância ou da transmissão do calor num corpo em  $\mathbb{R}^n$ : se  $n = 1$  representará uma varinha, se  $n = 2$  uma placa e se  $n = 3$  um sólido.

A condição  $u(x, 0) = g(x)$  representa então a distribuição de temperatura ou concentração no instante  $t = 0$ .

Vejamos como chegamos a (8.1) modelando a condução do calor num corpo homogêneo.

Se  $u(x, t)$  representa a temperatura (ou a concentração de um poluente) no instante  $t$  e no ponto  $x$ , fixada uma porção  $V$  do corpo,

- a derivada da quantidade de calor em  $V$  será  $\frac{d}{dt} \int_V u(x, t) dV = \int_V u_t(x, t) dV$ ;
- se o fluxo de calor através  $\partial V$  é o vetor  $Q$ , então a quantidade de calor que sai de  $V$  é  $\int_{\partial V} (Q \cdot n) dS$ ;
- se  $F$  representa uma fonte de calor, então o calor produzido em  $V$  será  $\int_V F dV$ .

Impondo a conservação da energia obtemos

$$\int_V u_t(x, t) dV = \int_V F dV - \int_{\partial V} (Q \cdot n) dS$$

e usando o teorema da divergência

$$\int_V [u_t - F + \operatorname{div}_x(Q)] dV = 0;$$

como isso vale para toda porção  $V$  do corpo chegamos à equação

$$u_t + \operatorname{div}_x(Q) = F. \quad (8.3)$$

Enfim, modelamos a condução do calor (ou difusão do poluente) por  $Q = -k\nabla u$  (o calor vai na direção em que a temperatura diminui): inserindo isso em (8.3) obtemos

$$u_t - k \operatorname{div}_x(\nabla_x u) = u_t - k\Delta_x u = F;$$

o parâmetro  $k$  pode ser posto igual a 1 re-escalando.

**Observação 8.1.** A equação (8.1) é uma aproximação: vale na hipótese de átomos pontiformes e supõe que a velocidade de propagação do calor seja infinita (gas ideal). Observe-se também que a equação é invariante com respeito ao valor da incógnita: isso, no caso do calor, não é coerente com a física pois sabemos que a temperatura é uma quantidade limitada por baixo: a aproximação tornar-se-á ruim para temperaturas perto do zero absoluto.  $\triangleleft$

**Observação 8.2.** Fazendo a troca de variável  $t \mapsto -t$  em (8.2) muda o sinal na equação, que se torna  $u_t + k\Delta_x u = F$ ; logo os problemas com  $t > 0$  e com  $t < 0$  são diferentes, de fato, lembre que já vimos no exercício 1.6 que para o problema com  $t < 0$  não tem dependência contínua dos dados.

Fisicamente este fato significa que o tempo não é reversível para os fenômenos descritos pela equação do calor (segunda lei da termodinâmica): dado  $u(x, 0)$  pode existir uma solução para  $t > 0$  e não existir para  $t < 0$ . (veremos isso melhor na observação 8.11).

Por outro lado, a equação é invariante com respeito a transformações do tipo  $(x, t) \mapsto (ax, a^2t)$  i.é, que mantêm a razão  $|x|^2/t$ .  $\triangleleft$

## 8.1 Solução fundamental

Nesta seção repetiremos o raciocínio da seção 7.5, para a equação do Calor.

Primeiramente definimos uma **solução generalizada** de  $u_t - \Delta u = F$  da seguinte maneira:

**Definição 8.3.**

Dizemos que  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$  é **solução no sentido das distribuições** de  $u_t - \Delta u = F$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  se

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u(x, t)[- \phi_t(x, t) - \Delta \phi(x, t)] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} F(x, t)\phi(x, t) \quad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (8.4)$$

Como na seção 7.5, a definição é justificada pelo fato que se  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{n+1})$  satisfizer pontualmente  $u_t - \Delta u = F$  então, integrando por partes uma vez em  $t$  e duas vezes em  $x$  (não aparecem termos de borda pois o suporte de  $\phi$  é compacto) obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u(x, t)[- \phi_t(x, t) - \Delta \phi(x, t)] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} [u_t(x, t) - \Delta u(x, t)]\phi(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} F(x, t)\phi(x, t).$$

Viceversa, se  $F \in C^0(\mathbb{R}^{n+1})$  e  $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$  satisfaz (8.4) então, operando de novo como na seção 7.5, deduzimos que  $u_t - \Delta u = F$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Podemos então definir também uma solução fundamental:

**Definição 8.4.** Chamamos **solução fundamental de pólo  $(p, \theta)$**  (para a equação do calor), uma função  $\psi_{(p, \theta)}$  que seja solução no sentido das distribuições de

$$\partial_t \psi_{(p, \theta)} - \Delta_x \psi_{(p, \theta)} = \delta_{(p, \theta)},$$

isto é,

$$\psi_{(p, \theta)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \psi_{(p, \theta)}(y, \tau) [-\phi_\tau(y, \tau) - \Delta_y \phi(y, \tau)] dV_y d\tau = \phi(p, \theta) \quad \text{para toda } \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \quad (8.5)$$

Uma **solução fundamental da equação do calor de pólo  $(0, 0)$**  é a seguinte:

$$\psi(y, \tau) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} & \text{se } y \in \mathbb{R}^n, \tau > 0, \\ 0 & \text{se } y \in \mathbb{R}^n, \tau \leq 0, \end{cases} \quad (8.6)$$

isso será verificado no lema 8.6.

**Observação 8.5.** A função  $\psi$  em (8.6) é interpretada "fisicamente" como uma *solução gerada por uma fonte de calor pontiforme concentrada no instante  $t = 0$  e no ponto  $x = 0$* .

Observemos que  $\psi$  é singular na origem mas está em  $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  (verifique que qualquer derivada de  $\psi$  com  $\tau > 0$  e  $y \neq 0$  tende a zero quando  $\tau \rightarrow 0$ ); além disso, para todo  $\tau > 0$ , a função  $\psi(\cdot, \tau)$  é uma gaussiana radial simétrica, de integral unitário, centrada em  $y = 0$  e de variância  $\sigma^2 = 2\tau$ , isto é, a fonte pontiforme gera uma distribuição de temperatura gaussiana, simétrica, de integral constante, centrada no ponto da fonte e variância que aumenta com o tempo (a temperatura se espalha).  $\triangleleft$

**Lema 8.6.** Para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  vale

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \psi(y, \tau) [-\phi_t(y, \tau) - \Delta \phi(y, \tau)] = \phi(0, 0). \quad (8.7)$$

*Demonstração.* Calculemos, para  $\tau > 0$ ,

$$\psi_\tau = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} \left[ -\frac{n}{2} \frac{1}{\tau^{(n+2)/2}} + \frac{|y|^2}{4\tau^2} \frac{1}{\tau^{n/2}} \right]$$

e

$$\Delta_y \psi = \frac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} \left[ -\frac{n}{2\tau} + \frac{|y|^2}{4\tau^2} \right];$$

logo  $\psi$  satisfaz a equação do calor tanto para  $\tau > 0$  quanto para  $\tau < 0$ . Concluimos que (8.7) vale sempre que o suporte de  $\phi$  não intercepte o plano  $\tau = 0$ .

Em caso contrário, precisamos calcular a integral (imprópria pois  $\psi$  é singular na origem)

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \psi[-\phi_t - \Delta\phi] = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^\infty d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, \tau)[- \phi_t(y, \tau) - \Delta\phi(y, \tau)] dV_y$$

(observe que a integral converge pois  $\phi_t + \Delta\phi$  é limitada (suporte compacto) e  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\cdot, \tau) = 1$ ).

Integrando por partes uma vez em  $\tau$  e duas vezes em  $y$  obtemos a integral de  $\psi_\tau - \Delta_y \psi$  em toda a região  $\mathbb{R}^n \times (t, \infty)$  e o termo de borda que provém do Laplaciano, que são ambos zero por causa do suporte compacto e pois  $\psi_t - \Delta\psi = 0$ . Além disso, o termo de borda da integração com respeito ao tempo é 0 no infinito, logo sobra apenas

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[ - \int_{\mathbb{R}^n} -\psi(y, t)\phi(y, t) dV_y \right].$$

Este limite vale  $\phi(0, 0)$ , em consequência do lema 8.7 a seguir. □

**Lema 8.7.** *Se  $\phi \in C^0(\mathbb{R}^{n+1})$  e é limitada então*

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, t)\phi(x+y, t) dV_y = \phi(x_0, 0).$$

*Demonstração.* Seja  $I_{x,t} := \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, t)\phi(x+y, t) dV_y = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z-x, t)\phi(z, t) dV_z$ . Lembrando que  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y, t) dV_y = 1$  para  $t > 0$ ,

$$|I_{x,t} - \phi(x_0, 0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z-x, t)|\phi(z, t) - \phi(x_0, 0)| dV_z.$$

Pela continuidade de  $\phi$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$|t| < \delta \text{ e } |z - x_0| < \delta \text{ implica } |\phi(z, t) - \phi(x_0, 0)| < \varepsilon,$$

logo, se  $t \in (0, \delta)$ ,

$$\int_{B_\delta(x_0)} \psi(z-x, t)|\phi(z, t) - \phi(x_0, 0)| dV_z \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \psi = \varepsilon.$$

Quando  $|z - x_0| \geq \delta$ , se  $|x - x_0| < \delta/2$  temos

$$|z - x| \geq |z - x_0| - |x_0 - x| \geq |z - x_0| - \delta/2 \geq |z - x_0|(1 - 1/2),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_{B_\delta(x_0)^c} \psi(z-x, t)|\phi(z, t) - \phi(x_0, 0)| dV_y &\leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_\delta(x_0)^c} e^{-|z-x|^2/4t} \leq \\ &\leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{B_\delta(x_0)^c} e^{-|z-x_0|^2/16t} \leq \frac{2\|\phi\|_\infty}{(4\pi t)^{n/2}} \int_\delta^\infty \omega_n e^{-\rho^2/16t} \rho^{n-1} d\rho \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando  $t \rightarrow 0$ , de fato, pondo  $r\sqrt{t} = \rho$  obtemos

$$\frac{1}{t^{n/2}} \int_\delta^\infty e^{-\rho^2/16t} \rho^{n-1} d\rho = \int_{\delta/\sqrt{t}}^\infty e^{-r^2/16} r^{n-1} dr :$$

como a integral imprópria converge no infinito e o extremo de integração tende a  $+\infty$ , a integral tende a zero.

Juntando as duas estimativas obtemos o resultado. □



## 8.2 Problema de valores iniciais

Nesta seção procuraremos resolver, para  $t \geq 0$ , o problema (8.2).

Definimos  $\mathcal{C}^{1t,2x}(U)$ , sendo  $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , o espaço das funções com derivada temporal contínua e derivadas espaciais de ordem um e dois contínuas.

### 8.2.1 O problema homogêneo

Começaremos estudando o caso homogêneo, isto é, com  $F = 0$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (8.8)$$

**Observação 8.8.** Como já comentamos, (8.8) não é um problema de Cauchy, logo não temos nenhuma garantia de existência e unicidade, nem localmente.

De fato, **as soluções não são únicas**, pois é possível construir infinitas soluções do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x, 0) = 0 : \end{cases} \quad (8.9)$$

(veja [JN] p. 211).

A idéia, em uma variável espacial, é a de construir uma solução (por séries de potências de variável  $x$  e coeficientes dependendo de  $t$ ) do problema de Cauchy  $u(0, t) = f(t)$ ,  $u_x(0, t) = 0$ , onde  $f(t) = e^{-1/t^2} \chi_{t>0}(t)$  (observe que o problema é não-característico mas o dado é  $\mathcal{C}^\infty$  sem ser analítico em  $t$ ). A série pode ser calculada, converge em todo  $\mathbb{R}^2$  e fornece uma família de soluções (podemos transladar no tempo e também pode se fazer o mesmo com  $e^{-1/t^\alpha}$  e  $\alpha > 1$ ) do problema (8.9). Por linearidade estas soluções sempre podem ser sobrepostas a qualquer solução de (8.2).  $\triangleleft$

Vejamos então como obter uma solução de (8.8): como a função  $\psi$  em (8.6) é uma solução para todo  $\tau > 0$ , definindo

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - y, t) g(y) dV_y \quad (8.10)$$

obtemos que  $u_t - \Delta_x u = 0$  para todo  $t > 0$ . Precisamos ver se é possível estender  $u$  por continuidade até  $t = 0$  e quanto vale o limite:

**Proposição 8.9.** Se  $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$  e é limitada então definindo  $u(x, t)$  como em (8.10), tem-se  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ,  $u_t - \Delta_x u = 0$  para todo  $t > 0$ ,  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0, 0^+)} u(x, t) = g(x_0)$ .

Logo, (8.10) pode ser estendida por continuidade a uma solução  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  do problema (8.8).

*Demonstração.* Observemos primeiro que  $u$  está bem definida pois  $g$  é limitada. Além disso  $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  e  $u_t - \Delta_x u = 0$  para todo  $t > 0$ , pois isso vale para  $\psi$ .

A última afirmação é consequência do lema 8.7.  $\square$

**Observação 8.10.** O resultado anterior significa que a função  $\psi$  pode ser vista como *solução fundamental do problema de valores iniciais (8.8)*, no sentido que pode ser interpretada fisicamente como a solução de (8.8), quando a condição inicial é um pique de temperatura de média 1, concentrado na origem.  $\triangleleft$

**Observação 8.11.** A proposição 8.9 mostra que, a diferença da equação da onda, a equação do calor apresenta uma **velocidade infinita de propagação das informações**, de fato se considerarmos  $g \geq 0$  tendo suporte compacto (mas não nula), a solução (8.10) satisfará  $u(x, t) > 0$  para todo  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Outra diferença com respeito à equação da onda é o **efeito regularizante**: vimos que no caso da onda dados irregulares implicavam em soluções irregulares, até mais do que os dados. A proposição 8.9 mostra que para a equação do calor acontece o contrário: é suficiente um dado contínuo para ter uma solução de classe  $C^\infty$  para todo  $t > 0$ .  $\triangleleft$

**Observação 8.12.** Uma consequência desta propriedade regularizante é a impossibilidade, em geral, de resolver o problema (8.8) para tempos negativos: se  $g(x) = u(x, 0)$  é apenas contínua, não pode ser parte da solução da equação do calor para tempos negativos (veja na observação 8.22 alguns detalhes a mais sobre esta afirmação).  $\triangleleft$

## 8.2.2 O problema com fonte

Para terminarmos de resolver o problema (8.2) precisamos resolver o problema não homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x, t), & \text{para } t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (8.11)$$

para isso podemos usar de novo o **princípio de Duhamel**, que no caso do calor fornece uma solução na forma  $u(x, t) = \int_0^t u[s](x, t) ds$  onde  $u[s](x, t)$  é a solução de

$$\begin{cases} u_t[s] - \Delta_x u[s] = 0, \\ u[s](x, s) = F(x, s) : \end{cases} \quad (8.12)$$

usando (8.10),  $u[s](x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - y, t - s) F(y, s) dV_y$ , logo a fórmula resultante é

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - y, t - \tau) F(y, \tau) dV_y. \quad (8.13)$$

Como a função  $\psi$  tem singularidade na origem, demonstrar que a fórmula (8.13) funciona será um pouco mais complicado que no caso da onda. Como fizemos com o Laplaciano consideraremos, para simplificar, funções  $F$  a suporte compacto em  $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ : mostremos o resultado

**Teorema 8.13.** *Seja  $F \in C_0^{1t, 2x}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ , então (8.13) é de classe  $C^{1t, 2x}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  e pode ser prolongada por continuidade a uma solução de (8.11).*

*Demonstração.* Observe que, pela hipótese,  $F$ ,  $F_t$  e  $\Delta F$  são limitadas.

Escrevendo (8.13) como

$$u(x, t) = \int_0^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) F(x - z, t - \theta) dz, \quad (8.14)$$

temos, para todo  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$u_t = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, t) F(x - z, 0) dz + \int_0^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) F_t(x - z, t - \theta) dz,$$

$$\Delta u = \int_0^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) \Delta_x F(x - z, t - \theta) dz$$

(e fórmulas análogas para as derivadas mistas); logo  $u$  é  $\mathcal{C}^{1t, 2x}$  e

$$u_t - \Delta u = \int_0^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) (\partial_t - \Delta_x) F(x - z, t - \theta) dz + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, t) F(x - z, 0) dz$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) (\partial_t - \Delta_x) F(x - z, t - \theta) dz + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, t) F(x - z, 0) dz, \quad (8.15)$$

(de novo a integral imprópria converge pois  $(\partial_t - \Delta_x) F$  é limitada e  $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\cdot, \theta) = 1$ ).

Observe agora que  $(\partial_t - \Delta_x) F(x - z, t - \theta) = (-\partial_\theta - \Delta_z) F(x - z, t - \theta)$ , depois disso podemos integrar por partes:

$$\int_{\varepsilon}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \theta) (-\partial_\theta - \Delta_z) F(x - z, t - \theta) dz =$$

$$= \int_{\varepsilon}^t d\theta \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_\theta - \Delta_z) \psi(z, \theta) F(x - z, t - \theta) dz - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, t) F(x - z, 0) dz + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \varepsilon) F(x - z, t - \varepsilon) dz$$

(os termos de borda da integração no espaço não aparecem pois supomos  $F$  a suporte compacto).

Como  $\psi$  satisfaz a equação do calor para  $\theta > 0$ , e o segundo termo corta com o último de (8.15), chegamos a

$$u_t - \Delta u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, \varepsilon) F(x - z, t - \varepsilon) dz;$$

pelo lema (8.7), este limite vale  $F(x, t)$ .

Para ver que  $u$  satisfaz a condição inicial nula é suficiente verificar que

$$|u(x, t)| \leq t \|F\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \psi(z, t) dz = t \|F\|_\infty \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow 0$ . □

**Observação 8.14.** No teorema 8.13 consideramos  $F \in \mathcal{C}_0^{1t, 2x}$  e com suporte compacto e obtivemos a mesma regularidade para a solução. Resultados melhores podem ser obtidos, conforme vimos para o Laplaciano na seção 7.6.4, mostrando que se  $F$  é Hölder contínua a solução obtida é em  $\mathcal{C}_0^{1t, 2x}$ , logo clássica.

Da fórmula (8.13) podemos de novo observar a velocidade infinita de propagação e a direção do tempo: se  $F \equiv 0$  até um tempo  $T$  e depois do tempo  $T$  tivermos  $F \geq 0$  com suporte compacto mas sem ser nula, então  $u \equiv 0$  para  $t \leq T$  e  $u > 0$  para  $t > T$ : isto significa que uma fonte de calor que aparece no instante  $T$  não pode influenciar os instantes anteriores mas influencia imediatamente o espaço todo a partir desse instante. ◁

**Observação 8.15.** Cabe destacar que tanto os comentários acima como os do final da seção anterior (problema homogêneo) apenas dizem respeito à particular solução que encontramos, mas não dizem nada sobre as soluções em geral já que, como vimos na observação 8.8, não temos unicidade. ◁

### 8.3 Problema misto e princípios do Máximo

Nesta seção estudaremos o **problema misto** (condições iniciais e de fronteira) para a equação do calor, em um domínio limitado  $\Omega$ :

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x, t) & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = g(x) & \text{em } \bar{\Omega}, \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{em } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (8.16)$$

A condição em  $\partial\Omega$  de tipo Dirichlet  $u = h$  pode ser substituída por uma de tipo Neumann ( $u_n = h$ ) ou Robin ( $\alpha u + u_n = h$ ). Em todo caso o problema modela, por exemplo, a condução de calor no corpo  $\Omega$ , tendo fronteira a temperatura fixada, ou isolada, ou que troca calor com o ambiente externo (veja os problemas análogos para o Laplaciano na seção 7.1).

Apesar da justificação física, o problema (8.16) não é de nenhum dos tipos vistos até agora: não é um problema de Cauchy, nem um problema de Dirichlet pois falta a condição na borda superior ( $\Omega \times \{T\}$ ) do domínio  $\Omega \times (0, T)$ .

Denotemos por  $U_T = \Omega \times (0, T)$ , por  $\Lambda_T = \Omega \times \{T\}$  e por  $\Gamma_T = \partial U_T \setminus \Lambda_T$ , isto é, separamos a borda de  $U_T$  nas duas componentes que incluem, respectivamente, a “tampa” superior, e tampa inferior junto com as bordas laterais; observe que as condições em (8.16) são dadas exatamente em  $\Gamma_T$ , que é chamada de **fronteira parabólica de  $U_T$** .

Um resultado importante para o estudo do problema (8.16) é o seguinte **princípio do máximo**:

**Teorema 8.16.** *Se  $u \in \mathcal{C}^{1t, 2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\bar{U}_T)$  satisfaz  $u_t - \Delta u \leq 0$  em  $U_T$ , então*

$$\max_{(x,t) \in \bar{U}_T} u(x, t) = \max_{(x,t) \in \Gamma_T} u(x, t). \quad (8.17)$$

*Demonstração.* Primeiro consideremos o caso  $u_t - \Delta u < 0$ : seja  $\varepsilon > 0$  e  $(x, t)$  um ponto no qual é atingido o máximo em  $\bar{U}_{T-\varepsilon}$ :

- se  $(x, t) \in U_{T-\varepsilon}$  então necessariamente  $u_t = 0$  e  $\Delta u \leq 0$ , contradição;
- se  $(x, t) \in \Lambda_{T-\varepsilon}$  então necessariamente  $u_t \geq 0$  e  $\Delta u \leq 0$ , contradição.

Logo necessariamente  $(x, t) \in \Gamma_{T-\varepsilon}$ , isto é,

$$\max_{\bar{U}_{T-\varepsilon}} u = \max_{\Gamma_{T-\varepsilon}} u \leq \max_{\Gamma_T} u;$$

como isso vale para qualquer  $\varepsilon > 0$  e  $u$  é contínua concluímos que

$$\max_{\bar{U}_T} u \leq \max_{\Gamma_T} u,$$

enquanto a relação  $\max_{\bar{U}_T} u \geq \max_{\Gamma_T} u$  é imediata já que  $\Gamma_T \subseteq \bar{U}_T$ .

Agora consideremos o caso geral  $u_t - \Delta u \leq 0$  e seja  $v = u - kt$  com  $k > 0$ , assim

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0,$$

logo pela conta anterior  $\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$ , logo

$$\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\bar{U}_T} (v + kt) \leq (\max_{\bar{U}_T} v) + kT = (\max_{\Gamma_T} v) + kT \leq (\max_{\Gamma_T} u) + kT;$$

como  $T$  é fixado, fazendo  $k \rightarrow 0$  obtemos  $\max_{\bar{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ . □

Como sempre, se  $u_t - \Delta u \geq 0$  a afirmação (8.17) vale para os mínimos, e se  $u_t - \Delta u = 0$  valem as duas.

Como do princípio do máximo para o Laplaciano (veja o teorema 7.22), podemos deduzir do teorema 8.16 os seguintes resultados de **unicidade** e **dependência contínua dos dados**:

**Teorema 8.17.** *Se  $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^{1t,2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$  são soluções do problema (8.16) com a mesma  $F$  e com dados, respectivamente,  $g_1, h_1$  e  $g_2, h_2$ , então  $\max_{\overline{U_T}} |u_1 - u_2| \leq \max \{|g_1 - g_2|, |h_1 - h_2|\}$ , isto é,*

$$|u_1 - u_2|_\infty \leq \max \{|g_1 - g_2|_\infty |h_1 - h_2|_\infty\}.$$

*Em particular, a solução de (8.16) (se existir) é única na classe das soluções em  $\mathcal{C}^{1t,2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ , para todo  $T > 0$ , logo é única em  $\Omega \times (0, \infty)$  também.*

*Estes resultados valem também se no problema (8.16) substituimos  $T$  por  $+\infty$ , já que valem para todo  $T > 0$ .*

O resultado acima mostra que o problema de Dirichlet para a equação do calor (isto é, impondo o valor de  $u$  em toda  $\partial U_T$ ) seria mal posto, já que são suficientes os dados em  $\Gamma_T$  para determinar unicamente a solução.

Podemos também afirmar que se em (8.16)  $g = 0$ , e  $F(x, t) = 0$ ,  $h(x, t) = 0$  até um certo tempo  $T$ , então a solução  $u(x, t)$  é nula pelo menos até o tempo  $T$ . Este último fato implica que perturbações (fontes ou mudanças na borda) que acontecem num instante  $T$ , só podem influenciar a solução para  $t \geq T$  e não para  $t < T$ : de novo vemos que nesta equação o tempo não pode ser revertido.

Vejam os enfim um *resultado de regularidade para o problema misto*, que complementa o resultado da proposição 8.9 que valia no caso do problema (8.8):

**Teorema 8.18.** *Se  $u \in \mathcal{C}^{1t,2x}(\overline{U_T})$  satisfaz  $u_t - \Delta u = 0$  em  $U_T$  então  $u \in \mathcal{C}^\infty(U_T)$*

*Demonstração.* Dada  $v \in \mathcal{C}^2(\overline{U_T})$ , se  $t \in (0, T)$  temos

$$0 = \int_{U_t} v(u_t - \Delta u) = - \int_{U_t} (v_t + \Delta v)u + \left[ \int_{\Omega} uv \right]_0^t + \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} (u\nabla v - v\nabla u) \cdot n.$$

Se  $x \in \Omega$  e  $\varepsilon > 0$ , ponhamos  $v(y, \tau) = \psi(x - y, t + \varepsilon - \tau)$  nesta identidade e façamos  $\varepsilon \rightarrow 0$ : a primeira integral é zero, o termo  $\int_{\Omega} [uv](y, t) = \int_{\Omega} \psi(x - y, \varepsilon)u(y, t) \rightarrow u(x, t)$  pelo lema 8.7, enquanto nos outros termos o limite é trivial pois a singularidade de  $v$  está no ponto  $(x, t + \varepsilon)$ , logo longe de  $t = 0$  e de  $\partial\Omega$ ; obtemos então

$$u(x, t) = \int_{\Omega} u(y, 0)\psi(x - y, t) - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} [u(y, \tau)\nabla\psi(x - y, t - \tau) - \psi(x - y, t - \tau)\nabla u(y, \tau)] \cdot n.$$

Esta é uma fórmula de representação para a solução em função dos dados iniciais e de  $u$  e  $u_n$  na borda; por isso pouco útil em geral já que ou  $u$  ou  $u_n$  é incógnito, mas é boa para estudar a regularidade da solução; de fato, derivando com respeito a  $x$  e  $t$  e trocando com a integração se tornam derivadas de  $\psi$  que é  $\mathcal{C}^\infty$  já que como já observado sendo  $x \in \Omega$  e  $t > 0$  e  $y \in \partial\Omega$ , a região de integração está longe da singularidade de  $\psi$ .

□

Observe que o teorema afirma que a solução é regular mesmo que os dados na borda sejam apenas  $\mathcal{C}^2$  em  $x$  e  $\mathcal{C}^1$  em  $t$ . Observe também que este resultado vale para qualquer solução, enquanto o da proposição 8.9 dizia apenas respeito à particular solução dada pela fórmula (8.10).

### 8.3.1 Princípio de Máximo para o problema em $\mathbb{R}^n$

Vejam agora uma versão do princípio de máximo para o caso do problema em  $\mathbb{R}^n$  (8.2).

Observe que se tentássemos aplicar o teorema 8.16 em limitados arbitrários  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  obteríamos que o máximo está em  $\Omega \times \{0\}$  ou em  $\partial\Omega \times [0, T]$ , mas sem um controle sobre os valores neste último conjunto não podemos excluir que esteja nele, logo dentro do domínio. Para obter um resultado útil precisamos algum controle sobre o comportamento da solução para  $|x| \rightarrow \infty$ : o resultado é o seguinte

**Teorema 8.19.** *Se  $u \in \mathcal{C}^{1t, 2x}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  satisfaz  $u_t - \Delta u \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  e*

$$\text{existem } M, a > 0 \text{ tais que } u(x, t) \leq Me^{a|x|^2} \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad (8.18)$$

então

$$\sup_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]} u(x, t) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) := S. \quad (8.19)$$

*Demonstração.* É claro que vale a desigualdade "≥", logo precisamos mostrar que vale "≤".

Podemos supor sem perda de generalidade  $4aT < 1$ : se não for assim dividimos o intervalo em períodos menores e depois juntamos o resultado em cada subintervalo, de fato, se o máximo em  $[(k+1)T, (k+2)T]$  é atingido em  $(k+1)T$  e o máximo em  $[kT, (k+1)T]$  é atingido em  $kT$  podemos deduzir que o máximo em  $[kT, (k+2)T]$  é atingido em  $kT$ , e assim por diante.

Seja agora  $\varepsilon > 0$  tal que  $4a(T + \varepsilon) < 1$  e, fixados  $\mu > 0$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  arbitrários seja

$$v_\mu = u - \mu\psi(i(x-y), T + \varepsilon - t) = u - \frac{\mu}{(4\pi(T + \varepsilon - t))^{n/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right),$$

assim  $(v_\mu)_t - \Delta v_\mu \leq 0$  em  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  (de fato,  $v_\mu$  tem uma singularidade mas apenas quando  $t = T + \varepsilon$  enquanto  $(\partial_t - \Delta_x)[\psi(i(x-y), T + \varepsilon - t)] = [-\psi_t - i^2 \Delta_x \psi](i(x-y), T + \varepsilon - t) = 0$ ).

Dado  $\rho > 0$ , seja  $B = B_\rho(y)$ ,  $U_{\rho, T} = B \times (0, T)$  e  $\Gamma_{\rho, T}, \Lambda_{\rho, T}$  definidos como na seção anterior; logo pelo teorema 8.16

$$\max_{\overline{U}_{\rho, T}} v_\mu \leq \max_{\Gamma_{\rho, T}} v_\mu, \quad (8.20)$$

onde, quando  $t = 0$  temos  $v_\mu(x, 0) \leq u(x, 0) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) := S$ , enquanto para  $|x - y| = \rho$  temos

$$\begin{aligned} v_\mu(x, t) &\leq Me^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(4\pi(T + \varepsilon - t))^{n/2}} \exp\left(\frac{\rho^2}{4(T + \varepsilon - t)}\right) \leq \\ &\leq Me^{a(|y| + \rho)^2} - \frac{\mu}{(4\pi(T + \varepsilon))^{n/2}} \exp\left(\frac{\rho^2}{4(T + \varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

Como  $a < \frac{1}{4(T+\varepsilon)}$ , o termo dominante para  $\rho$  grande é o último, logo existe  $\rho$  (dependendo de  $y$  e  $\mu$ ) tal que  $v_\mu|_{\partial B_\rho \times [0, T]} \leq S$ . Por consequência, 8.20 implica que  $\max_{\overline{U_{\rho, T}}} v_\mu \leq S$ , em particular,  $\max_{t \in [0, T]} v_\mu(y, t) \leq S$ , isto é,

$$\max_{t \in [0, T]} u(y, t) - \mu\psi(0, T + \varepsilon - t) \leq S;$$

como  $\psi$  está limitada entre os valores positivos  $\psi(0, T + \varepsilon)$  e  $\psi(0, \varepsilon)$  fazendo  $\mu \rightarrow 0$  obtemos  $\max_{t \in [0, T]} u(y, t) \leq S$  e pela arbitrariedade de  $y$  obtemos o resultado final.  $\square$

**Observação 8.20.** Como sempre, trocando o sinal, podemos afirmar que se  $u_t - \Delta u \geq 0$  em  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  e

$$\text{existem } M, a > 0 \text{ tais que } u(x, t) \geq -Me^{a|x|^2} \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

então

$$\inf_{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]} u(x, t) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0). \quad (8.21)$$

Se  $u_t - \Delta u = 0$  e ambas limitações valem então (8.19) e (8.21) valem.  $\triangleleft$

Consequência do teorema é

**Corolário 8.21.** *A solução do problema (8.2) é única na classe das funções em  $\mathcal{C}^{1t, 2x}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$  que satisfazem  $|u(x, t)| \leq Me^{a|x|^2}$  para alguns  $M, a$ .*

**Observação 8.22.** As infinitas soluções da observação 8.8 não satisfazem esta condição: pode-se mostrar (veja [JN] p. 217) que se  $v$  é uma delas, para ter  $|v(x, t)| \leq Me^{a|x|^2}$  precisa deixar  $a$  depender de  $t$  e tender a infinito quando  $t \rightarrow 0$ .

Se  $g$  é limitada então para a solução (8.10) vale

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x - y, t)g(y)dy \leq \|g\|_\infty,$$

isto é, a conclusão do teorema 8.19 é evidente para esta solução. Por outro lado, esta desigualdade implica que existem  $a, M$  tais que  $|u(x, t)| \leq Me^{a|x|^2}$ , logo é esta a única solução do corolário.

Voltando à observação 8.12, quando afirmamos que, por causa da propriedade regularizante, se  $g(x) = u(x, 0)$  é apenas contínua, então não pode ser parte da solução da equação do calor para tempos negativos, deveríamos ter dito que não pode ser parte de uma solução que satisfaz  $|u(x, t)| \leq Me^{a|x|^2}$ , já que sem esta condição outras soluções podem existir.  $\triangleleft$

Citamos para concluir o **teorema de Widder** (veja [JN] pag 222), que afirma que, se existir uma solução positiva em  $\mathcal{C}^{1t, 2x}(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  de (8.8) (problemas de valores iniciais para a equação homogênea), esta é única.

Este teorema é importante de um ponto de vista físico, pois nos problemas que envolvem temperatura podemos sempre assumir  $T \geq 0$ .

## 8.4 Alguns resultados via energia

Para todos os resultados desta seção consideraremos  $\partial\Omega$  suficientemente regular para poder usar as identidades de Lagrange-Green.

O primeiro resultado é praticamente análogo ao resultado de unicidade do teorema 8.17, mas com a vantagem de poder-se aplicar a diferentes condições em  $\partial\Omega$ .

**Teorema 8.23.** *Existe no máximo uma solução em  $\mathcal{C}^{1t,2x}(\overline{U_T})$  de (8.16). O mesmo vale no caso de condição de Neumann  $u_n = h$  em  $\partial\Omega$ .*

*Demonstração.* Como sempre a unicidade é equivalente a mostrar que só pode ser nula a solução  $w$  de (8.16) com  $F, g, h$  nulos (ou do análogo problema com condição de Neumann).

Seja então  $E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx$ : usando (7.11) e o fato que  $w|_{\partial\Omega} = 0$  ou  $w_n|_{\partial\Omega} = 0$  obtemos

$$E'(t) = \int_{\Omega} ww_t = \int_{\Omega} w\Delta w = - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \leq 0. \quad (8.22)$$

Como  $E(0) = 0$  e por definição trata-se de uma quantidade não negativa, deduzimos  $E \equiv 0$ , logo  $w \equiv 0$ .  $\square$

*Exercício 8.24.* Mostre que o mesmo resultado vale para a condição de Robin com  $\alpha \geq 0$ .  $\star$

**Observação 8.25.** Comparando com a equação da onda, aqui a energia é definida integrando o quadrado da solução, no caso da onda era o quadrado do gradiente (nas  $n + 1$  variáveis).

No caso da onda a energia era conservada no problema misto com condição de Dirichlet ou de Neumann (veja a seção 6.5), aqui vimos que a energia decresce sempre que a solução não é constante.  $\triangleleft$

O segundo resultado é um resultado de *unicidade atrás*: diz que conhecendo a solução no instante  $T$  existe uma única condição inicial compatível.

**Teorema 8.26.** *Sejam  $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{U_T})$  soluções de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x, t) & \text{em } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{em } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (8.23)$$

*Se  $u(x, T) = v(x, T)$  em  $\Omega$  então  $u \equiv v$  em todo  $\overline{U_T}$ . O mesmo vale para o problema com condição de Neumann  $u_n = h$ .*

*Demonstração.* Seja  $w = u - v$  e consideremos como antes  $E(t)$ , que satisfaz (8.22).

Derivando mais uma vez obtemos

$$E'' = -2 \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla w_t = 2 \int_{\Omega} (\Delta w) w_t = 2 \int_{\Omega} (\Delta w)^2,$$

onde usamos que  $\int_{\partial\Omega} w_t \nabla w \cdot n$  é nula tanto no caso Neumann quanto no caso Dirichlet.

Também podemos estimar

$$(E')^2 = \left( \int_{\Omega} |\nabla w|^2 \right)^2 = \left( \int_{\Omega} w \Delta w \right)^2 \leq \int_{\Omega} w^2 \int_{\Omega} (\Delta w)^2 = E(t) E''(t).$$



Como  $E(T) = 0$ , ou  $E(t) \equiv 0$  ou existem  $t_1, t_2 \in [0, T]$  tais que  $E > 0$  em  $[t_1, t_2]$  e  $E(t_2) = 0$ .

Seja agora  $f(t) = \ln(E(t))$ : logo  $f' = E'/E$  e  $f'' = [E''E - (E')^2]/E^2 \geq 0$  pela conta acima. Logo  $f$  é convexa e, para  $t \in (t_1, t_2)$  e  $\tau \in (0, 1)$ , vale

$$f((1 - \tau)t_1 + \tau t) \leq (1 - \tau)f(t_1) + \tau f(t),$$

isto é

$$E((1 - \tau)t_1 + \tau t) \leq E(t_1)^{(1-\tau)} E(t)^\tau$$

e por continuidade isso vale também para  $t = t_2$ , implicando

$$0 \leq E((1 - \tau)t_1 + \tau t_2) \leq E(t_1)^{(1-\tau)} E(t_2)^\tau = 0.$$

Logo  $E \equiv 0$  em  $(t_1, t_2)$ , contradição. Concluimos que  $E(t) \equiv 0$  em  $[0, T]$ , logo  $w(0) \equiv 0$  em  $\overline{U_T}$ .  $\square$

Observe que para o problema “para frente” temos unicidade e dependência contínua dos dados, enquanto para o problema “atrás” temos apenas unicidade, mas não temos dependência contínua dos dados: isso pode ser visto com um simples exemplo: se em (8.23)  $\Omega = [0, \pi]$ ,  $F = 0$ ,  $h = 0$  e  $u(x, T) = \varepsilon \sin(nx)$ , então  $u(x, 0) = \varepsilon \sin(nx)e^{n^2 T}$  (veja o exercício 1.6), isto é, não existe nenhuma constante  $C$  tal que se  $|u(\cdot, T)| \leq \varepsilon$  se tenha  $|u(\cdot, 0)| \leq C\varepsilon$ .

## 8.5 Problemas mistos via separação de variáveis

Se  $\Omega$  é um domínio limitado podemos tentar resolver a equação do calor ou da onda em  $\Omega \times [0, \infty)$ , com condições de fronteira de tipo Dirichlet ou Neumann (homogêneas) via separação de variáveis. Procurando uma solução na forma  $u(x, t) = T(t)X(x)$ , obtemos, para  $X, T \neq 0$ ,

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} \quad \text{no caso do calor}, \quad \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta X(x)}{X(x)} \quad \text{no caso da onda};$$

Como lado direito e esquerdo dependem cada um de uma das variáveis, necessariamente serão constantes. Isso nos leva a querer resolver um problema para o Laplaciano na forma (dependendo das condições de borda)

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{ou} \quad u_n = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.24)$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro real.

Este é chamado *problema de autovalores*: é conhecido (veja por exemplo em [BZ]) que existe uma sequência  $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  divergente, com  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 < \dots$ , de valores de  $\lambda$  pelos quais existem soluções não triviais  $\phi_i$  de (8.24); estas soluções são regulares se  $\Omega$  o for, e podem ser escolhidas de maneira de formar uma base hortonormal para  $L^2(\Omega)$ .

Resolvendo agora  $T' = -\lambda T$  obtemos soluções da forma  $Ce^{-\lambda t}$ , para o calor enquanto para a onda resolvemos  $T'' = -\lambda T$  obtendo soluções da forma  $A \sin(\lambda t) + B \cos(\lambda t)$ .

Chegamos então no seguinte resultado: se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x),$$

então a solução será (formalmente)

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x) e^{-\lambda_i t};$$

no caso da onda, com condições

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \phi_i(x)$$

teremos a solução (formal)

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \left[ a_i \cos(\lambda_i t) + \frac{b_i}{\lambda_i} \sin(\lambda_i t) \right].$$

Apenas faltará verificar a convergência apropriada.

É interessante observar os *resultados de regularidade* nesta solução por séries: no caso do calor, uma vez que  $a_i \rightarrow 0$  (necessário para que convirja a série dos dados) tem-se, graças ao termo  $e^{-\lambda_i t}$ , que para todo  $t$  a série da solução converge uniformemente com todas suas derivadas (efeito regularizante); no caso da onda, pelo contrário, a regularidade da solução é proporcional à regularidade do dado.

Outra observação interessante é a seguinte: no problema (8.24) com condições de Dirichlet, tem-se  $\lambda_1 > 0$ , logo a solução do calor decai sempre pelo menos como  $e^{-\lambda_1 t}$ ; no caso de condições de Neumann,  $\lambda_1 = 0$ , logo o primeiro termo da série da solução do calor é uma constante, que indica que o valor médio da solução é constante. Isso é lógico também pelo significado físico: no caso Dirichlet a borda é mantida a temperatura 0 e o calor pode fluir pelas bordas até uniformizar a temperatura em  $\Omega$ , enquanto no caso Neumann a borda é isolada termicamente assim o calor pode apenas redistribuir-se em  $\Omega$ .

## Bibliografia do capítulo

- Capítulo em geral:  
principal: [EV] páginas 44..65, [JN] páginas 206..222;  
veja também: [FL] páginas 142...158

# Bibliografia

- [BZ] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983, Théorie et applications. [Theory and applications].
- [CH] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989, Partial differential equations, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [EV] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [FL] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, second ed., Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [GB] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1964.
- [GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001, Reprint of the 1998 edition.
- [JN] F. John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [LV] R. J. LeVeque, *Numerical methods for conservation laws*, Second ed., Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

# Índice

- admissível
  - condição, 44
- característica
  - coordenada, 59, 61
  - curva, 36, 43, 59, 61, 75
  - direção, 36, 43
  - método das, 33, 34
  - projeção, 34, 36, 43
  - stripe, 43
  - superfície, 67
  - variedade, 16
- característico
  - polinômio, 16
  - problema (não), 75
  - sistema, 34, 37, 38, 43
  - vetor, 16
- Cauchy
  - dados de, 11
  - problema de, 11
- choque, 54
- clássica (solução), 8
- classificação
  - eq. linear, 57, 65
  - eq. não linear, 70
  - ordem maior que dois, 69
- condição
  - da esfera exterior, 130
  - não-caracteristicidade, 15
    - caso linear, 16
    - caso não-linear, 18
    - caso quasilinear, 18
- cone de luz
  - do futuro, 86
  - do passado, 86
- conoidal (solução), 43
- conservação da energia
  - eq. da onda, 90
- D´Alambert
  - fórmula de, 91
  - operador de, 85
- dependência contínua dos dados, 38, 91, 105, 117, 141, 145
- determinante
  - eq. segunda ordem, 58
- dispersão, 93
- dissipação, 93
- domínio, 112
- domínio de dependência, 46, 77, 83, 89
- Duhamel
  - princípio de, 103, 138
- elíptica, 16, 58, 66
- energia
  - eq. da onda, 88, 90
- entrópica (solução), 55
- entropia (condição de), 55
- equação
  - a coeficientes constantes, 68
  - da ótica geométrica, 9
  - da onda, 9, 17
    - $n$  ímpar, 98
    - $n$  par, 102
  - não homogênea, 103
  - perda de regularidade, 106
- de Beltrami, 62
- de Burger, 51, 52
- de Laplace, 9, 17, 109
- de Poisson, 109
- de transporte linear, 9
- de transporte quasilinear, 9
- de Tricomi, 64
- degenerada, 67
- diferencial parcial, 8

- do calor, 9, 17, 67, 133
- linear, 8
- quasilinear, 9
- semilinear, 9
- totalmente não-linear, 9
- existência
  - eq. ordem um, 38
- existência e unicidade, 24, 38
- fórmula
  - de D´Alambert, 91
  - de Kirchhoff, *ver* Kirchhoff
  - de Poisson, *ver* Poisson
  - integral de Green, 123
  - integral de Poisson, 123
- formas canônicas, 57, 66
- formulação integral, 52
- fronteira parabólica, 140
- função
  - barreira, 130
  - de Green, 123, 125, 129
  - de Neumann, 124
  - harmônica, 109
- generalizada (solução), 51
- Hadamard
  - método de, 101
- hiperbólica, 58, 66
  - normalmente hiperbólica, 66
  - ultrahiperbólica, 67
- hiperbólico
  - sistema, 76
- Huygens
  - princípio de, 105
- identidade
  - Lagrange-Green, 112
- integral (solução), 52
- Kirchhoff
  - fórmula de, 98
- Lewy
  - exemplo, 47
- média esférica, 95
- método de descida, 101
- método de Hadamard, *ver* Hadamard
- método de Perron, 130
- Monge
  - cone de, 42, 43, 46
- multi-índice, 7
- núcleo
  - de Poisson, 123, 126, 129
- parabólica, 58, 66
- perda de regularidade eq. da onda, 106
- Poisson
  - fórmula de, 102
- ponto regular, 130
- princípio
  - do máximo (calor), 140
  - do máximo (Laplaciano), 116
- problema
  - bem posto segundo Hadamard, 9, 91, 105
  - característico, 15, 16, 18
  - de Dirichlet, 110
  - de Neumann, 110
  - de Robin, 111
  - mal posto, 87, 115, 141
  - misto (calor), 140
  - misto (onda), 92
  - não-característico, 15, 16, 18, 75
- propriedade
  - do valor médio, 114
- Rankine-Hugoniot
  - condição de salto de, 54
- região de influência, 46, 77, 83, 89
- regularidade, 138, 141
- salto, 53
- singularidades
  - propagação, 54, 79
- sistema
  - característico, 34, 37, 38, 43
  - estritamente hiperbólico, 76
  - hiperbólico, 76
- solução
  - clássica, 8
  - conoidal, 43

- Dirichlet em bola, 128
- Dirichlet em semiespaço, 125
- entrópica, 55
- eq. da onda  $n$  ímpar, 98
- eq. da onda  $n$  par, 102
- eq. da onda não homogênea, 103
- generalizada, 51, 92, 118, 134
- integral, 52
- no sentido das distribuições, 118, 134
- solução fundamental, 135, 137
  - calor, 135
  - Laplaciano, 119
- subharmônica, 113
- superfície
  - de tipo espacial, 87
  - de tipo temporal, 87
- superharmônica, 113
- teorema
  - Cauchy-Kowalevski, 25, 46, 48
  - de Widder, 143
  - existência e unicidade primeira ordem, 38
- tipo de não linearidade, 8
- transformação
  - de Legendre, 72
  - hodográfica, 72
- unicidade, 93
  - atrás, 144
  - eq. da onda, 89
  - eq. do calor, 141
  - eq. ordem um, 38
  - Laplaciano, 113, 118
- velocidade de propagação, 89, 138, 139

