1 Classificação de eq. de segunda ordem em duas variáveis

Considere a equação diferencial linear

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g\,, \tag{1.1}$$

onde os coeficientes a, b, c, d, f e g podem depender de x e y, com regularidade pelo menos $\mathcal{C}^1$.

Temos três casos típicos para os coeficientes dos termos de grau dois, chamados de **formas canônicas**, que são:

(H) $a = -c = 1$, $b = 0$ (ou, $b = 1$, e $a = c = 0$): operador da onda $u_{xx} - u_{yy}$ ou u_{xy}: 2 vetores característicos independentes;

(E) $a = c = 1$, $b = 0$: é o caso do operador Laplaciano $u_{xx} + u_{yy}$, que como vimos é um operador elíptico, isto é, nenhum vetor característico

(P) $a = 1$, $b = c = 0$: operador do calor ou degenerado, um vetor característico.

(quase) toda equação da forma (1.1) pode ser reduzida, pelo menos localmente, a uma dessas três formas, através de uma mudança de variáveis.

Escrevemos $a\partial_{xx} + 2b\partial_{xy} + c\partial_{yy}$ como $\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$ onde $\partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{bmatrix}$ e $\mathcal{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right]$.

Dada a mudança de variáveis $\mathbf{z} = (z, w) = G(\mathbf{x}) = G(x, y)$, então $\partial_{\mathbf{x}} = J_G^t \partial_{\mathbf{z}}$, logo $\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}} = J_G \mathcal{A} J_G^t \partial_{\mathbf{z}} \cdot \partial_{\mathbf{z}}$, isto é, a matriz $\widetilde{\mathcal{A}}$ correspondente à $\mathcal{A}$ nas novas variáveis é

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = J_G \mathcal{A} J_G^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 & az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y \\ az_xw_x + b(z_xw_y + z_yw_x) + cz_yw_y & aw_x^2 + 2bw_xw_y + cw_y^2 \end{bmatrix},$$

Além disso

$$-\widetilde{\Delta} = AC - B^2 = det(\widetilde{\mathcal{A}}) = det(\mathcal{A})det(J_G)^2 = (-\Delta)det(J_G)^2 = (ac - b^2)(z_xw_y - z_yw_x)^2,$$

$\boxed{\text{o sinal do determinante é invariante por mudanças de variáveis}}$

Definição 1.1. Dizemos que a equação (1.1) é:

(H) Hiperbólica se $\Delta = b^2 - ac > 0$,

(E) Elíptica se $\Delta = b^2 - ac < 0$,

(P) Parabólica se $\Delta = b^2 - ac = 0$.

Teorema 1.2. *Se a equação* (1.1) *é realmente de segunda ordem e é do mesmo tipo (H, E ou P) em todo um aberto, então pode (pelo menos localmente) ser transformada, através de uma mudança de variáveis, numa nova equação onde os termos de grau dois estão na forma canônica correspondente.*

1.1 O caso hiperbólico $\Delta > 0$

Quando $\Delta > 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{zw} + ... = 0$.

Suponha $a \neq 0$

$\Delta = b^2 - ac > 0$ implica que a equação $A = 0$ fatora:

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = a(z_x - \lambda_1 z_y)(z_x - \lambda_2 z_y) = 0,$$

onde $\lambda_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$ (em geral dependendo de (x, y)). A equação $C = 0$ fatora da mesma maneira

Temos então duas equações independentes para determinar z e w:

$$(z_x - \lambda_1 z_y) = 0\,, \qquad (1.2)$$

$$(w_x - \lambda_2 w_y) = 0\,. \qquad (1.3)$$

Impondo arbitrariamente dois problemas de Cauchy não-característicos com $z_y \neq 0$ e $w_y \neq 0$ (por exemplo $z(k, y) = y$ e $w(k, y) = y$ ao longo de uma reta vertical $x = k$) obtemos $z, w \in \mathcal{C}^1$ em vizinhança desta reta.

Logo obtemos, localmente, a transformação $(z, w) = G(x, y)$.

Como $\frac{z_x}{z_y} = \lambda_1 \neq \lambda_2 = \frac{w_x}{w_y}$ a transformação satisfaz $det(J_G) \neq 0$.

Definição 1.3. As curvas $z = const$ e $w = const$ são ditas **curvas características** da equação; as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características** (as que põe a equação na forma canônica).

Passando às variáveis características, a equação se torna $Bu_{zw} + ... = 0$, ou a equivalente $u_{zz} - u_{ww} + ... = 0$ aplicando uma ulterior rotação de 45^o.

Com a equação nesta forma muitas propriedades podem ser vistas, e as vezes podemos até achar a solução.

1.2 O caso parabólico $\Delta = 0$

Quando $\Delta = 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{ww} + ... = 0$.

Cuidado: precisamos pedir $\Delta = 0$ em todo um aberto

Suponha $a \neq 0$, ($a = c = 0$ implicaria $b = 0$)
Agora a equação $A = 0$ fatora na forma

$$a(z_x - \lambda_1 z_y)^2 = 0\,.$$

Permite calcular z como anteriormente resolvendo $(z_x - \lambda_1 z_y) = 0$, mas não podemos impor $C = 0$ pois assim w não resultaria independente de z.

É suficiente escolher uma qualquer w que gere uma mudança de variável com z: de fato $A = 0$ e $\Delta = 0$ implica $B = 0$.

Passando às variáveis características, a equação se torna $Cu_{ww} + ... = 0$. (se aparece o termo em u_z então é na forma da eq. do calor, caso contrário é uma família de EDOs em w, parametrizada em z)

No caso parabólico definimos

Definição 1.4. As curvas $z = const$ (apenas) são ditas **curvas características** da equação; ainda as novas variáveis z e w são ditas **coordenadas características**.

1.3 O caso elíptico $\Delta < 0$

Quando $\Delta < 0$ é sempre possível levar a equação à forma $u_{zz} + u_{ww} + ... = 0$.

Neste caso as equações não fatoram: precisa obter as duas **coordenadas características** z, w de uma vez, fatorando em $\mathbb{C}$.

Neste caso não existem **curvas características**, pois o polinômio característico nunca se anula.

2 Equações lineares de segunda ordem em n variáveis

Podemos escrever os termos de ordem máximo

$$\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x)\partial^\alpha u \tag{2.1}$$

como $\mathcal{A}\partial_{\mathbf{x}} \cdot \partial_{\mathbf{x}}$ onde agora $\partial_{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \\ \vdots \\ \partial_{x_n} \end{bmatrix}$ e

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{2e_1} & \frac{1}{2}a_{e_1+e_2} & .. & \frac{1}{2}a_{e_1+e_n} \\ \frac{1}{2}a_{e_1+e_2} & a_{2e_2} & .. & \frac{1}{2}a_{e_2+e_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2}a_{e_1+e_n} & \frac{1}{2}a_{e_2+e_n} & .. & a_{2e_n} \end{bmatrix}.$$

Em geral, não conseguimos uma mudança de variáveis que diagonalize A em todo um aberto.

Fixado $x_0 \in \Omega$ existe uma mudança de variáveis linear que diagonaliza e normaliza $\mathcal{A}$: a nova matriz $\widetilde{\mathcal{A}}_{x_0}$ terá a forma a blocos

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \begin{bmatrix} I_{N_p} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{N_z} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

onde N_p, N_n e N_z são, respectivamente, o número de autovalores positivos, negativos e nulos de $\mathcal{A}$.

Esta matriz corresponde então às formas canônicas que podemos escrever como

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + ... = 0, \tag{2.3}$$

onde as variáveis são separadas nos vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, correspondentes aos auto-espaços de $1, -1, 0$.

Mesmo sem poder transformar a equação na forma canônica em todo um aberto, podemos usar a forma (2.2) para catalogar as equações:

Definição 2.1. A equação correspondente a (2.1) diz-se:

1. **elíptica** no ponto x_0 se $\widetilde{\mathcal{A}}_{x_0} = I_n$: os autovalores de $\mathcal{A}_{x_0}$ tem todos o mesmo sinal); de fato, neste caso $\mathcal{A}_{x_0}$ é definida positiva (ou negativa) e o polinômio característico $char(\xi) = \xi^t \mathcal{A}_{x_0} \xi$ seria nulo apenas para $\xi = 0$;

2. **hiperbólica** no ponto x_0 se

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{x_0} = \begin{pmatrix} I_{N_p} & \\ & -I_{N_n} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

   com $N_p, N_n > 0$, isto é, os autovalores de $\mathcal{A}_{x_0}$ não são nulos mas tem sinais diferentes;

   - *normalmente hiperbólica* se $N_p = 1$: forma canônica $\partial_{xx} u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(x, \mathbf{y}) + ... = 0$ (equação da onda);
   - *ultrahiperbólica* se $N_p, N_n > 1$ (não existem problemas físicos assim).

3. **parabólica** no ponto x_0 se $\det \widetilde{\mathcal{A}}_{x_0} = 0$, isto é, existem autovalores nulos $(N_z > 0)$.

   Se $N_z = 1$ e N_n (ou N_p) é nulo, temos a eq. do calor . Sobre outros típos de parabólicas (por exemplo, $u_t = u_{xy}$) quase não existem resultados nem aplicações físicas.

Definição 2.2. No caso em dimensão maior que dois, chamaremos **superfície característica** da equação, qualquer superfície que seja característica em todo ponto: dessa maneira, se for na forma $z(\mathbf{x}) = const$, satisfará $\nabla z \mathcal{A} \nabla z^t = 0$ em todo ponto.

Exemplo 2.3.

1. Seja $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u_x - u_y - u_z$.
   A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   o polinômio característico é: $p(\lambda) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1)$ as raízes são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$.

   A equação é parabólica.

   Em novas variáveis poderá ser escrita na forma $u_{xx}(x, y, z) + 2u_{yy}(x, y, z) + ... = 0$.

2. Seja $yu_{xx} + u_{yy} + 2zu_{yz} = 0$.
   A matriz correspondente é

$$\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix},$$

   o polinomio característico é $p(\lambda) = (\lambda - y)(1 - \lambda)\lambda - z^2(y - \lambda)$,

   as raízes são: $\lambda_1 = y$, $\lambda_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$ e $\lambda_3 = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4z^2}}{2}$.

   Assim temos dois casos:

Caso I. Se $yz = 0$ então $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_3 = 0$ e a equação é parabólica (planos $y = 0$ e $z = 0$).

Caso II. Se $y \neq 0$ e $z \neq 0$, tem-se $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$, uma vez que $\sqrt{1 + 4z^2} > 1$, assim a equação é hiperbólica.

★

2.1 O caso a coeficientes constantes

As equações a coeficientes constantes de ordem dois podem ser postas na forma canônica no espaço inteiro.

Podemos ainda simplificar mais:

- 1o passo: diagonalizar e normalizar a parte de ordem dois:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu = 0\,,$$

  onde os $a_i = 1, -1, 0$.

- 2o passo: se ($a_i \neq 0$), usando a mudança de incognita

$$u(x) = v(x)\, exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2a_i} x_i \right)$$

  obtemos

$$\begin{aligned} u_{x_i} &= \left(v_{x_i} - \frac{b_i}{2a_i} v \right) exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2a_i} x_i \right)\,, \\ u_{x_i x_i} &= \left(v_{x_i x_i} - 2\frac{b_i}{2a_i} v_{x_i} + \frac{b_i^2}{4a_i^2} v \right) exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{2a_i} x_i \right)\,, \end{aligned}$$

  logo chegamos a eliminar as derivadas primeiras.

Em particular chegamos a

- no caso elíptico $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) + \lambda u(\mathbf{x}) = 0$,
- no caso hiperbólico $\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$,
- no caso normalmente hiperbólico $\partial_{xx} u(x, \mathbf{y}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(x, \mathbf{y}) + \lambda u(x, \mathbf{y}) = 0$.
- no caso parabolico

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \sum_{i=r+1}^{n} b_i u_{x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0;$$

  enfim, com uma oportuna rotação entre as variáveis $\mathbf{z}$ podemos alinhar obtemos

$$\Delta_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) - \Delta_{\mathbf{y}} u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) + b\, u_t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) + \lambda u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w}, t) = 0\,.$$

3 Classificação de equações de ordem maior que 2

Para as equações de ordem maior que 2, a classificação é mais complicada e menos clara.

Em todo caso, uma equação (linear) é **elíptica** quando $\chi_L(\xi) = 0 \iff \xi = 0$: non existem superfícies características.

Por exemplo a equação $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$ é elíptica: $\chi(\xi, \eta) = \xi^4 + 2\xi^2\eta^2 + \eta^4 = (\xi^2 + \eta^2)^2 = 0$.

4 Classificação para equações não lineares

No caso de equações não lineares a classificação dependerá, em geral, não apenas da equação mas também da solução considerada.

- O caso *semilinear* é análogo ao linear.
- No caso *quaselinear*, fixada uma solução, podemos substiruí-la nos coeficientes e classificar como no caso linear.
- No caso *totalmente não linear*, podemos classificar a equação em correspondência de uma certa solução linearizando a equação:

  Seja u a solução considerada e $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ outra função incógnita: aproximamos

  $$\begin{aligned} F(x, y, u+\varepsilon, (u+\varepsilon)_x, (u+\varepsilon)_y, (u+\varepsilon)_{xx}, (u+\varepsilon)_{xy}, (u+\varepsilon)_{yy}) \simeq \\ \simeq F + F_v\varepsilon + F_p\varepsilon_x + F_q\varepsilon_y + F_r\varepsilon_{xx} + F_s\varepsilon_{xy} + F_t\varepsilon_{yy} \quad (4.1) \end{aligned}$$

  onde F e suas derivadas são sempre calculadas em $(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$: (4.1) é agora uma equação linear para ε e podemos usá-la para classificar a equação original em correspondência da sua solução u

  logo a equação será elíptica, parabólica ou hiperbólica dependendo do sinal de $F_s^2 - 4F_rF_t$.

Exemplo 4.1. • A equação (quase linear)

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2 u_{yy} = 0, \tag{4.2}$$

onde $c > 0$ é um parâmetro, é elíptica se $|u_x| < c$, parabólica se $|u_x| = c$ e hiperbólica se $|u_x| > c$.

Por exemplo, em correspondência da solução $u(x, y) = \lambda x$ será elíptica se $|\lambda| < c$, parabólica se $|\lambda| = c$ e hiperbólica se $|\lambda| > c$.

Esta equação é um **modelo simplificado (velocidade predominantemente horizontal) para o escoamento de um fluido compressível**, onde a velocidade do fluido é $V = \nabla u$ e c é a velocidade do som.

A **versão mais completa** dessa equação é

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0 : \tag{4.3}$$

neste caso $\Delta = c^2(|V|^2 - c^2)$.

Em ambos os casos, onde o escoamento é supersônico a equação é hiperbólica enquanto onde é subsônico ela é elíptica.

• O carácter da equação

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = C$$

(totalmente não-linear) depende de C: de fato,
$F_s = -2s$, $F_r = t$, $F_t = r$ e logo

$$F_s^2 - 4F_rF_t = 4s^2 - 4tr = -4C \ :$$

é elíptica se $C > 0$, hiperbólica se $C < 0$ e parabólica se $C = 0$.

Para a equação

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = u$$

o carácter depende da solução, mudando em função do sinal dela.

★

5 Propagação de singularidades em problemas hiperbólicos.

Seja γ uma curva de equação $x = \xi(y)$ que divide o conjunto Ω em duas regiões Ω_l e Ω_r sejam u_l e u_r as restrições de u a estes conjuntos, prolongáveis por continuidade até γ.

Dado $p \in \gamma$, denotamos por $[\![z]\!]\,(p)$ o **salto de z no ponto p**, isto é

$$[\![z]\!]\,(p) = z_r(p) - z_l(p).$$

Proposição 5.1. *Seja $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ $(k \geq 2)$ uma solução de (5.2) e u_l, u_r suas restrições a Ω_l e Ω_r, respectivamente. Suponhamos que u_l e u_r sejam de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ e suas derivadas até a ordem $k+1$ possam ser prolongadas até γ. Suponhamos também que os coeficientes da equação sejam de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.*
Então um salto na derivada $k+1$-ésima de u só é possível ao longo de uma curva característica e o salto será apenas entre as derivadas na direção normal.

Lema 5.2. *Dada uma função* $z : \Omega \to \mathbb{R}$ *que seja contínua em* Ω *e de classe* $\mathcal{C}^1$ *tanto em* $\overline{\Omega_l}$ *como em* $\overline{\Omega_r}$*, vale*

$$[\![z_x]\!]\,(\xi(y), y)\,\xi'(y) + [\![z_y]\!]\,(\xi(y), y) = [\![z_x]\!]\,\xi' + [\![z_y]\!] = 0 \tag{5.1}$$

ao longo de γ*. Isto significa que* $[\![z_\tau]\!] = 0$*: o salto é apenas na derivada normal!*

Demonstração. Pela continuidade de z temos

$$0 = z_r(\xi(y), y) - z_l(\xi(y), y) = [\![z]\!]\,(\xi(y), y)\,;$$

derivando

$$((z_r)_x\xi' + (z_r)_y) - ((z_l)_x\xi' + (z_l)_y) = ((z_r)_x - (z_l)_x)\xi' + ((z_r)_y - (z_l)_y) = [\![z_x]\!]\,\xi' + [\![z_y]\!] = 0.$$

□

Consideremos

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g\,, \tag{5.2}$$

onde os coeficientes dependem apenas de (x, y) e são contínuos.

Seja $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $u_l, u_r \in \mathcal{C}^2$ soluções de (5.2) e suas derivadas até a ordem dois possam ser prolongadas até γ.

— por ser $\mathcal{C}^1(\Omega)$ vale $[\![u]\!] = [\![u_x]\!] = [\![u_y]\!] = 0$ sobre γ.

— Subtraindo a equação (5.2) calculada dos dois lados de γ obtemos (lembrando que os coeficientes são contínuos) $a\,[\![u_{xx}]\!] + 2b\,[\![u_{xy}]\!] + c\,[\![u_{yy}]\!] = 0$. Juntando esta equação às obtidas aplicando o lema 5.2 aplicado a u_x e u_y obtemos

$$\begin{cases} a\,[\![u_{xx}]\!] & + & 2b\,[\![u_{xy}]\!] & + & c\,[\![u_{yy}]\!] & = 0 \\ \xi'\,[\![u_{xx}]\!] & + & [\![u_{xy}]\!] & & & = 0 \\ & & \xi'\,[\![u_{xy}]\!] & + & [\![u_{yy}]\!] & = 0 \end{cases}\,, \tag{5.3}$$

cujo determinante é

$$\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ \xi' & 1 & 0 \\ 0 & \xi' & 1 \end{vmatrix} = a - 2b\xi' + c(\xi')^2 = \chi_L(1, -\xi');$$

logo u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} também serão contínuas (saltos nulos) a menos que este determinante seja zero, isto é, que a curva $(\xi(y), y)$ seja característica.

Os saltos nas derivadas segundas não serão independentes mas deverão satisfazer a condição

$$[\![u_{yy}]\!] = -[\![u_{xy}]\!]\,\xi' = [\![u_{xx}]\!]\,(\xi')^2. \tag{5.4}$$

Esta relação simplesmente afirma o fato óbvio que só pode ter salto na derivada segunda normal a γ, pois a continuidade de u, u_x e u_y implica que também serão contínuas suas derivadas tangenciais.

Repetindo as contas acima, podemos considerar o caso de uma solução (clássica) em $\mathcal{C}^2(\Omega)$ de (5.2), que seja de classe $\mathcal{C}^3$ em Ω_l e Ω_r e tenha salto nas derivadas terceiras ao longo de γ, supondo agora também que os coeficientes da equação sejam de classe $\mathcal{C}^1$.

iterando demonstramos a proposição.

Os mesmos resultados valem para não lineares, mas as características dependem da solução

Num operador elíptico não pode ter descontinuidade em nenhuma ordem de derivação!

6 Para que serve pôr na forma canônica?

Consideremos $\partial^2_{xy} u = F(x, y)$.

$$u_x(x, y) = u_x(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} u_{xy}(x, \eta) d\eta = u_x(x, y_0)(x) + \int_{y_0}^{y} F(x, \eta) d\eta$$

$$u(x, y) = u(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} u_x(\xi, y) d\xi = u(x_0, y) + \int_{x_0}^{x} u_x(\xi, y_0)(\xi) d\xi + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(\xi, \eta) d\eta \, d\xi.$$

$$= u(x_0, y) + u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(\xi, \eta) d\eta \, d\xi.$$

$\boxed{\text{Se } F = 0 \text{ solução geral é } u(x, y) = f(x) + g(y)}$

Obs: esta fórmula não resolve explicitamente o PdC: ela nos fornece a sol se conhecemos $= u(x, y_0)$ e $u(x_0, y)$.
Uma fórmula parecida pode ser obtida para o PdC.

Consideremos $\partial^2_{xy} u = F(x, y, u, u_x, u_y)$.

(note que qualquer EDP semilinear em 2 var. de 2a ord. pode ser posta nesta forma!)

Vale então

$$u(x, y) = u(x_0, y) + u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} F(\xi, \eta, u(\xi, \eta), u_x(\xi, \eta), u_y(\xi, \eta)) d\eta \, d\xi.$$

Esta equação integro-diferencial fornece implicitamente a solução: pode ser usada para resolver, aproximar, ou obter propriedades via métodos iterativos, de ponto fixo, ecc..

(A prova do teorema de existência e unicidade para EDOs é feita escrevendo uma eq. parecida e provando que define uma contração em um oportuno espaço).