1 Equação da onda

Equação da onda em dimensão (espacial) n:

$$\Box u := u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t) \tag{1.1}$$

onde $u = u(x,t)$ e x é um vetor em $\mathbb{R}^n$.

- O operador $\Box$ é dito **operador de D´Alambert**.
- A equação (1.1) é sempre (normalmente) **hiperbólica**.
- $\chi(\xi,\tau) = \tau^2 - |\xi|^2$ logo os vetores característicos descrevem um cone $\tau = \pm|\xi|$ (retas a 45 graus para o problema em dim. 1)

Consideramos em geral um **problema de Cauchy** (não característico) da forma

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) : \end{cases} \tag{PdC-O}$$

u e u_t são fixadas no instante $t = 0$.

Podemos resolver apenas para $t > 0$, pois trocando t por $-t$ o problema não muda.

Definimos:

- $\boxed{\text{Cone do passado}}$ do ponto (x_0, t_0) a região

$$CP_{x_0,t_0}\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \leq t_0 - |x - x_0|\}$$

- $\boxed{\text{Cone do futuro}}$ do ponto (x_0, t_0) a região

$$CF_{x_0,t_0}\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq t_0 + |x - x_0|\}$$

as superfícies $\partial CP_{x_0,t_0}, \partial CF_{x_0,t_0}$ são características.

2 Algumas ferramentas e fórmulas

Teorema fundamental do cálculo integral / Teorema do divergente

$$\int_a^b f'\,dx = [f]_a^b \qquad\qquad \int_\Omega div(F)\,dV = \int_{\partial\Omega} (F\cdot n)\,dS$$

integração por partes

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$\int_\Omega div(F)\,g\,dV = \int_{\partial\Omega} g(F\cdot n)\,dS - \int_\Omega F\cdot\nabla g$$

em particular

$$\int_a^b f''g = [f'g]_a^b - \int_a^b f'g'$$

$$\int_\Omega (\Delta f)\,g\,dV = \int_{\partial\Omega} g(\nabla f\cdot n)\,dS - \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g$$

´

Derivada de uma integral em domínio variável

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B_{g(t)}} f dV\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{g(t)} d\tau \int_{\partial B_\tau} f dS\right) = g'(t)\int_{\partial B_{g(t)}} f dS. \quad (2.1)$$

---

3 Modelos físicos

- **vibrações longitudinais** de uma varinha ou de um gás (dim 1)
- **pequenas vibrações transversais** de uma corda ou uma membrana (dim 1,2)
- **vibrações** em um gás (dim 3)
- A equação quaelinear (aqui x,y espaciais, nao tem tempo)

  $$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2 u_{yy} = 0,$$

  substituindo $\varepsilon = u - Vx$ $(V > c)$, linearizando e reescalando dá

  $$-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0 :$$

  modela **pequenas perturbações da solução supersónica** Vx.

- **Campos elétrico e magnético no vácuo**: das equações de Maxwell no vácuo

  $$\begin{array}{rl} div(E) = 0 & div(B) = 0 \\ rot(E) = -B_t & rot(B) = E_t/c^2\,, \end{array}$$

  obtemos $E_{tt}/c^2 = rot(B_t) = -rot(rot(E)) = \Delta E + \nabla(div(E)) = \Delta E$.

4 Unicidade

Teorema 4.1. *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ $(n \geq 1)$ *e satisfaz*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{em } \ \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{em } \ \overline{B_R(x_0)} \end{cases} \tag{4.1}$$

com $R \leq T$, *então* $u \equiv 0$ *em* $CP_{x_0,R}$.

Observação 4.2. O teorema 4.1 implica nos seguintes importantes resultados.

- O problema (PdC-O) possui no máximo uma **única solução**
- A solução de (PdC-O) num ponto (x,t) depende apenas dos dados ϕ, ψ e de F em $CP_{x,t}$.
  Viceversa, os dados ϕ, ψ no ponto $(x,0)$ influenciam u apenas em $CF_{x,0}$ e F no ponto (x,t) influencia apenas em $CF_{x,0}$.
- **a velocidade de propagação das informações é finita**
- Se ϕ, ψ e F possuem *suporte compacto*, então a solução $u(\cdot,t)$ também terá suporte compacto para todo $t > 0$.

  Neste caso podemos definir a **energia** da solução

  $$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t^2(\cdot,t) + |\nabla u(\cdot,t)|^2 \right],$$

  logo podemos calcular (o termo de borda será nulo)

  $$\frac{d}{dt}E = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] = \int_{\mathbb{R}^n} u_t(\underbrace{u_{tt} - \Delta u}_{=F}). \tag{4.2}$$

  Concluímos que **se $F = 0$ e ϕ, ψ têm suporte compacto então E é uma quantidade conservada**.

◁

4.1 Equação da onda em domínios limitados - Energia

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior n, e seja $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ satisfazendo

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{Ω-O}$$

(por exemplo, representa uma corda ou membrana com borda fixada, posição e velocidade prescritas em $t = 0$)

Defina $E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2 + |\nabla_x u|^2$.
Então

- $E(t)$ é constante quando $F = 0$,
- A solução do (Ω-O) é única.
- O mesmo vale com a condição de Neumann $\frac{\partial}{\partial n} u(x,t) = 0$ no lugar da condição de Dirichlet $u(x,t) = 0$, para $x \in \partial\Omega,\ t > 0$.
- Se a eq. fosse $u_{tt} - \Delta_x u + u_t = F(x,t)$ então teríamos
  – $E(t)$ é não-crescente quando $F = 0$ (dissipação),
  – a solução é única.

5 A equação da onda em uma dimensão

Consideremos (PdC-O) com $n = 1$ e com o parâmetro c^2 que representa a velocidade de propagação das ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{5.1}$$

A solução completa é

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+ct)+\phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t ds\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)d\xi;$$

esta fórmula é dita **fórmula de D´Alambert**

Da fórmula de D´Alambert podemos obter várias informações.

- Para ter solução de (5.1) de classe $\mathcal{C}^2$ **os dados deverão ser pelo menos $\phi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$ e $F \in \mathcal{C}^1$**. Analogamente, dados $\phi \in \mathcal{C}^k$, $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}$ e $F \in \mathcal{C}^{k-1}$ implicarão em solução de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$.
- **A solução no ponto (x,t) depende:**
  - de ϕ apenas nos dois pés das características por (x,t),
  - de ψ ao longo do segmento entre estes dois pontos,
  - de F no triângulo de vértice (x,t) que as duas características definem com a reta $t = 0$ (cone do passado).
- A solução com $F = 0$ está na forma $f(x+ct) + g(x-ct)$, de fato as coordenadas características $z = x + ct$ e $w = x - ct$ levam a eq. na forma $u_{zw} = 0$
- sabemos que a solução é única e que temos uma fórmula explicita, logo podemos deduzir da fórmula a **dependência contínua dos dados**.

Teorema 5.1. *Para o problema de Cauchy (5.1) com $\phi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$ e $F \in \mathcal{C}^1$ existe uma única solução que depende com continuidade dos dados.*

6 A equação da onda em dimensão ímpar maior que um

A solução de (PdC-O) quando $n > 1$ **e ímpar** pode ser obtida aproveitaremos a invariância por rotações do Laplaciano e várias identidades diferenciais.

6.1 Ferramentas necesárias

- Seja $\omega_n = \int_{\partial B_1} dS$: medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$,
  $(\omega_1 = 2,\ \omega_2 = 2\pi,\ \omega_3 = 4\pi,\ ..)$
  A medida de uma esfera de raio r será $\omega_n r^{n-1}$
  A medida de uma bola de raio r será $\frac{\omega_n}{n} r^n$.
- Seja $\displaystyle ⨍_A f dA = \frac{\int_A f dA}{|A|}$: a **média de f em A**.

Definição 6.1. Sejam $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$; definimos **média esférica** de f, de centro x e raio r a quantidade

$$M_f(x,r) := ⨍_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y \quad \left(= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f(x + r\eta)\, dS_\eta \right).$$

- Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ então $M_f(x,r) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.
- podemos estender $M_f(x,r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$ como uma função par e contínua com $M_f(x,0) = f(x)$.
- Se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ então M_f satisfaz

$$\Delta_x M_f(x,r) = \left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_f(x,r)$$

  para todo $r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$.

Corolário 6.2. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ então $\Box u = 0$ se e só se*

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t), \qquad \text{para } r > 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{6.1}$$

onde a média é feita apenas na variável x.

Lema 6.3. *Se $n > 1$ é ímpar e $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R})$ então valem as seguintes* **identidades***:*

$$D^2 \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[x^{n-2}\phi(x)\right] = \left(\frac{D}{x}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[x^{n-2}\left(\phi''(x) + \frac{(n-1)}{x}\phi'(x)\right)\right], \tag{6.2}$$

Aplicamos o operador $\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2}(\cdot)\right]$ à equação (6.1) para M_u:

$$\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2}\left[\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t)\right]\right] = \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2}\left[\partial_t^2 M_u(x,r,t)\right]\right];$$

comutando as derivadas e usando (6.2) obtemos

$$\partial_r^2 \left[\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} M_u(x,r,t)\right]\right] = \partial_t^2 \left[\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} M_u(x,r,t)\right]\right]. \tag{6.3}$$

Deduzimos que a quantidade $\left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2}M_u(x,r,t)\right]$ satisfaz, para todo x, a equação da onda em dimensão um nas variáveis r, t. Logo podemos encontrá-la usando a fórmula de D´Alambert.

No caso $n = 3$ a formulação resulta bem mais simples: a equação (6.3) será simplesmente

$$\partial_r^2 \left[r M_u(x,r,t)\right] = \partial_t^2 \left[r M_u(x,r,t)\right].$$

◁

Definamos

$$V(x,r,t) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} M_u(x,r,t)\right].$$

Vale então

$$\begin{cases} V_{tt}(x,r,t) - V_{rr}(x,r,t) = 0, \\ V(x,r,0) = F(x,r), \\ V_t(x,r,0) = G(x,r) \end{cases} \tag{6.4}$$

onde

$$\begin{cases} F(x,r) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} M_\phi(x,r)\right], \\ G(x,r) := \left(\frac{\partial_r}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left[r^{n-2} M_\psi(x,r)\right]; \end{cases} \tag{6.5}$$

Aplicando a fórmula de D´Alambert temos que a solução é

$$V(x,r,t) = \frac{F(x,r-t)+F(x,r+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} G(x,\xi)d\xi\,. \tag{6.6}$$

Precisamos agora voltar a obter u:

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n} \lim_{r\to 0} \frac{V(x,r,t)}{r} = \lim_{r\to 0} M_u(x,r,t) \tag{6.7}$$

onde $\gamma_n = (n-2)\cdot(n-4)...1 \quad (\gamma_3 = 1)$.

Concluímos que

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t F(x,t) + G(x,t)\right], \tag{6.8}$$

Logo

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \fint_{\partial B_t(x)} \phi\, dS\right) + \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-3}{2}} \left(t^{n-2} \fint_{\partial B_t(x)} \psi\, dS\right)\right]; \tag{6.9}$$

esta é a **fórmula resolutiva da equação da onda homogênea em dimensão $n > 1$ ímpar**.

Teorema 6.4. *Se $n > 1$ é ímpar, $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+3}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ então existe uma solução $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ de (PdC-O) e é data pela (6.9).*

Quando $n = 3$ torna-se

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B_t(x)} \phi \, dS\right) + t \fint_{\partial B_t(x)} \psi \, dS; \tag{6.10}$$

explicitando a derivada

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + t\nabla\phi(y)\cdot\vec{n} + t\psi(y)] \, dS_y = \fint_{\partial B_t(x)} [\phi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)] \, dS_y; \tag{6.11}$$

esta é chamada **fórmula de Kirchhoff**.

7 A equação da onda em dimensão par

Quando n é par podemos deduzir a solução do caso em dimensão $n+1$ supondo que tudo seja constante com respeito a uma das variáveis (método de descida ou de Hadamard).

Procuremos então a solução $u(x,t)$ (com $x \in \mathbb{R}^n$ e n par) de (PdC-O) através da solução $\widetilde{u}(x,z,t)$ de

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta_x \widetilde{u} - \widetilde{u}_{zz} = 0, \\ \widetilde{u}(x,z,0) = \widetilde{\phi}(x,z) := \phi(x), \\ \widetilde{u}_t(x,z,0) = \widetilde{\psi}(x,z) := \psi(x). \end{cases} \tag{7.1}$$

A solução existe pelo teorema 6.4 e da fórmula (6.9) podemos deduzir que $\widetilde{u}$ não dependerá de z logo $u(x,t) := \widetilde{u}(x,0,t)$ será a solução:

$$u(x,t) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\partial_t \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dV_y\right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial_t}{t}\right)^{\frac{n-2}{2}} \left(t^n \fint_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dV_y\right)\right]; \tag{7.2}$$

onde $\gamma_n = 2 \cdot 4 \ldots n \quad (\gamma_2 = 2)$.

esta é a **fórmula resolutiva da equação da onda em dimensão n par**.

Teorema 7.1. *Se n é par, $\phi \in \mathcal{C}^{\frac{n+4}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathcal{C}^{\frac{n+2}{2}}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma solução em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ de (PdC-O) e é data pela (7.2).*

Quando $n = 2$ (7.2) torna-se

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\partial_t\left(t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dV_y\right) + t^2 \fint_{B_t(x)} \frac{\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dV_y\right] \tag{7.3}$$

explicitando a derivada:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{t\phi(y) + t\nabla\phi(y)\cdot(y-x) + t^2\psi(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dV_y; \tag{7.4}$$

esta é chamada **fórmula de Poisson** (refere-se ao caso $n = 2$).

Uma outra forma para para (7.4) é a seguinte:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{\phi(y) + \nabla\phi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)}{\sqrt{1 - |\frac{y-x}{t}|^2}}\, dV_y. \tag{7.5}$$

8 A solução da equação não homogênea

Princípio de Duhamel: a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

é

$$u(x,t) = \int_0^t v^s(x,t) ds, \tag{8.2}$$

onde $v^s(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} (v^s)_{tt} - c^2 \Delta_x (v^s) = 0, \\ v^s(x,s) = 0, \\ (v^s)_t(x,s) = F(x,s). \end{cases} \tag{8.3}$$

Demonstração. "verificação":

$$u_t = \partial_t \left(\int_0^t v^s(x,t) ds \right) = v^t(x,t) + \int_0^t v^s_t(x,t) ds = 0 + \int_0^t v^s_t(x,t) ds$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \partial_t \left(\int_0^t v^s_t(x,t) ds \right) = v^t_t(x,t) + \int_0^t v^s_{tt}(x,t) ds; \\ &= F(x,t) + \int_0^t c^2 \Delta_x v^s(x,t) ds = F(x,t) + c^2 \Delta_x u(x,t) ds. \end{aligned}$$

□

Dos Teoremas 6.4-7.1 sabemos que para resolver (8.3) precisa $F \in \mathcal{C}^{[\frac{n}{2}]+1}$:

Teorema 8.1. *Seja $F \in \mathcal{C}^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, então (8.2) é de classe $\mathcal{C}^2$ e é solução de (8.1).*

Os casos n=1,2,3:

$$n=1: \qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(y,s)dy,$$

$$n=2: \qquad u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t ds\int_{B_{t-s}(x)} \frac{F(y,s)}{\sqrt{(t-s)^2-|y-x|^2}}dV_y$$

$$n=3: \qquad u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t ds\int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{F(y,s)}{t-s}dS_y =$$

9 Comentários

- Como para o caso $n = 1$, mostramos **existência, unicidade** e uma fórmula para a solução da qual podemos verificar a **dependência contínua dos dados**.

- No caso $n > 1$ ímpar, podemos ver que a solução em (x,t) depende de ϕ, ψ e de um certo número de suas derivadas, mas apenas na esfera de centro x e raio t, isto é, depende destas funções apenas numa pequena vizinhança desta esfera, e não no interior da bola, como sugeria o teorema 4.1.

  Este fato é chamado **princípio de Huygens** e não vale nem em dimensão $n = 1$ nem em dimensão par.

  Como som e luz satisfazem a equação da onda em dimensão 3, o princípio de Huygens implica no fato que um sinal (de luz ou de som) emitido em $t = 0, x = 0$ é recebido exatamente no instante $t = |x|$ no ponto x: isso permite de maneira simples transmitir receber e decodificar sinais sonoros e luminosos. O mesmo não acontece no caso de ondas numa superfície liquida.

- para ter solução $\mathcal{C}^2$ precisaremos dados tanto mais regulares quanto maior for a dimensão: Esta **perda de regularidade** é devida ao fato que as singularidades propagando nos cones característicos podem se somar em algumas regiões dando singularidades mais fortes.

  Por outro lado, vimos na observação 4.2 que, pelo menos para dados a suporte compacto, a energia $\int u_t^2 + |\nabla u|^2$ é conservada: isso significa que a soma das norma L^2 de u_t e ∇u resta constante: a deterioração da regularidade acontece apenas no sentido clássico, não para as derivadas no sentido L^2.