1 O Laplaciano

- **Equação de Laplace**: $-\Delta u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
- **Equação de Poisson**: $-\Delta u(x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
- Uma função $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ que satisfaz a equação de Laplace $-\Delta u = 0$ é dita **função harmônica** .
- o Laplaciano é **invariante por rotações e translações**. Por isso aparece em modelos físicos de fenômenos que possuem simetrias deste tipo.
- O problema de Cauchy para o Laplaciano é mal posto (e não tem motivação física)

  Como o operador é elíptico, não tem nenhuma restrição quanto à orientação da superfície dos dados.

---

2 Modelos físicos

- situação de equilíbrio de um fenômeno de **difusão** (p.e. **temperatura**);
- dado um campo vetorial V (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) satisfazendo

$$\begin{cases} div\, V = f, \\ rot\, V = 0; \end{cases} \tag{2.1}$$

  a segunda equação implica que (pelo menos localmente) existe um potencial para V: $V = \nabla u$. A primeira equação torna-se $\Delta u = f$.

  - V é o **campo eletrostático** e f a representa a carga elétrica;
  - V representa o **escoamento estacionário irrotacional e incom-primível** de um fluido (neste caso f representa eventuais fontes ou "poços"de fluido).

2.1 Problemas típicos

- **problema de Dirichlet**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u(x) = g(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

  - distribuição de temperatura ao equilíbrio num corpo com fontes de calor f e **temperatura fixada na fronteira** $g(x)$
  - potencial eletrostático em Ω se a densidade de carga é f e **$\partial\Omega$ é um condutor** (logo o potencial é constante em $\partial\Omega$)

- **problema de Neumann**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u_\nu(x) = h(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

  onde ν é a normal externa de $\partial\Omega$.

  - **corpo isolado** termicamente (fluxo de calor nulo, isto é, derivada normal da temperatura nula)
  - campo elétrico ($E = \nabla u$) é conhecido em $\partial\Omega$.
  - para o fluido, $u_\nu = 0$ significa que o fluido não atravessa a fronteira, u_ν fixado é um **fluxo de fluido** entrando/saindo.

- **problema de Robin** determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ \alpha(x)u(x) + u_\nu(x) = \beta(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PR}$$

  - quando o corpo **troca calor** com o exterior o fluxo de calor (derivada da temperatura) é proporcional á diferencia de temperatura com respeito à temperatura externa,

3 Identidade de Lagrange Green e consequências

Seja Ω um **domínio** (aberto e conexo), limitado e com borda regular.

Proposição 3.1. *Dadas $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ se todas as integrais convergem, valem as seguintes* **identidades de Lagrange-Green**

$$\int_\Omega v\Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u) \cdot n \, dS - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dV, \tag{3.1}$$

$$\int_\Omega v\Delta u \, dV = \int_{\partial\Omega} (v\nabla u - u\nabla v) \cdot n \, dS + \int_\Omega u\Delta v \, dV. \tag{3.2}$$

Teorema 3.2. *Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ são ambas soluções do problema de Dirichlet (PD) então $u = v$, se são soluções do problema de Neumann (PN), $u - v = constante$.*

4 Propriedade do valor médio para funções harmônicas

Definição 4.1.

(a). Uma função $u \in C(\Omega)$ é dita **subharmônica** em Ω se

$$u(x) \leq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

(b). Uma função $u \in C(\Omega)$ chame-se **superharmônica** em Ω se

$$u(x) \geq \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \quad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega.$$

Esta propriedade é intimamente ligada ao Laplaciano: de fato vale o seguinte

Teorema 4.2. *Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*

- $-\Delta u \leq 0$ *em* $\Omega \iff u$ *é subharmônica .*
- $-\Delta u \geq 0$ *em* $\Omega \iff u$ *é superharmônica.*
- $-\Delta u = 0$ *em* $\Omega \iff$ *vale a seguinte propriedade* **propriedade do valor médio***:*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dV_y \qquad \text{para todos } x, r \text{ tais que } \overline{B_r(x)} \subset \Omega. \tag{4.1}$$

A propriedade do valor médio implica na regularidade da função:

Teorema 4.3. *Se $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ satisfaz a propriedade do valor médio (4.1) em Ω, então $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em Ω.*

Corolário 4.4. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ satisfaz $-\Delta u = 0$ em Ω então $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.*

Corolário 4.5. *Um PdC para o Laplaciano só pode ter solução em vizinhança de S se os dados são $\mathcal{C}^\infty$.*

(algumas contas usadas nas provas anteriores)

$$
\begin{aligned}
\partial_r M_u(x,r) = \partial_r \fint_{\partial B_r(x)} u(y) dS_y &= \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial B_1(0)} \left[\nabla u(x+r\eta)\cdot\eta\right]\, dS_\eta = \\
&= \frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(0)} div_\eta[\nabla u(x+r\eta)]\, dV_\eta\,, \\
&= \frac{r}{n}\fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dV_y.
\end{aligned}
$$

$\underline{u(x) = \lim_{r\to 0} M_u(x,r)}$

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &:= \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\, dV_y = \int_{B_\varepsilon(x)} \widetilde{\eta}_\varepsilon(|x-y|)u(y)\, dV_y \\
&= \int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(\rho) d\rho \int_{\partial B_\rho(x)} u(y)\, dS_y; \\
&= u(x)\int_0^\varepsilon \widetilde{\eta}_\varepsilon(\rho)\omega_n \rho^{n-1} d\rho = u(x)\int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon = u(x).
\end{aligned}
$$

5 Princípio de máximo

- o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão fraca** se $Lu \leq 0$ implica
$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{\partial\Omega} u(x). \tag{5.1}$$
- o operador L satisfaz o **princípio do máximo em Ω na versão forte** se $Lu \leq 0$ implica que
$$\text{se } x_0 \in \Omega \text{ é tal que } \ u(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \ \text{ então } u \text{ é constante em } \Omega. \tag{5.2}$$

Quando L é linear, trocando u por $-u$ podemos sempre obter afirmações análogas sobre mínimos.

Teorema 5.1. *Se Ω é um domínio (conexo) limitado, o operador $-\Delta$ satisfaz o princípio de máximo tanto na versão fraca quanto na versão forte, para funções em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$,*

Em particular, se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ é harmônica então valem (5.1), (5.2) e suas versões com mínimo.

Considere o problema de Dirichlet com condição homogênea
$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \ \ \Omega, \\ u(x) = 0 & em \ \ \partial\Omega : \end{cases} \tag{5.3}$$
- $f \leq 0 \ \Rightarrow \ u \leq 0$ em Ω (resp. $f \geq 0 \ \Rightarrow \ u \geq 0$ em Ω).
- $f \leq 0 \ \Rightarrow \ u < 0$ ou $u \equiv 0$ em Ω (resp. $f \geq 0 \ \Rightarrow \ u > 0$ ou $u \equiv 0$ em Ω).

Teorema 5.2. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ são soluções do problema de Dirichlet com a mesma f e com dados na fronteira, respectivamente, g_1 e g_2, então*
$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \leq \max |g_1 - g_2|.$$

Esta é uma forma de **dependência contínua dos dados** e implica **unicidade da solução do problema de Dirichlet** (PD) na classe $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$:

Corolário 5.3. *Se $u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ são ambas soluções do problema de Dirichlet (PD) então $u = v$.*

6 Soluções fundamentais

Vamos definir um tipo de solução generalizada:

- Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é **solução no sentido das distribuições** de $-\Delta u = f$ em Ω se

$$-\int_\Omega u\Delta\phi = \int_\Omega f\phi \qquad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \tag{6.1}$$

- pode ser generalizada mais ainda: podemos então definir solução no sentido das distribuições de $-\Delta u = F$ para qualquer F funcional linear sobre $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, apenas pedindo $-\int_\Omega u\Delta\phi = F(\phi)$ para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

- De particular interesse é o caso do funcional linear

$$\delta_p : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R} : \phi \mapsto \phi(p).$$

  Chamamos **solução fundamental de pólo p** (para o Laplaciano), uma função ψ_p que seja solução no sentido das distribuições de

$$-\Delta\psi_p = \delta_p.$$

Podemos achar uma solução fundamental observando que

- se for regular deve satisfazer $-\Delta\psi_p = 0$ em $\Omega \setminus \{p\}$.
- se for radial (de centro 0): $\psi(x) = \widetilde{\psi}(|x|)$, então $\widetilde{\psi}(\rho)$ satisfaz $\widetilde{\psi}'' + \frac{n-1}{\rho}\widetilde{\psi}' = 0$ para $\rho > 0$.

Proposição 6.1. *Se*

$$\psi(y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^{2-n}}{(n-2)\omega_n} + D & \textit{para} \quad n \geq 3, \\ -\dfrac{\ln(|y|)}{2\pi} + D & \textit{para} \quad n = 2, \\ -\dfrac{|y|}{2} + D & \textit{para} \quad n = 1, \end{cases} \tag{6.2}$$

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ e $0 \in \Omega$ então

$$\int_\Omega \psi\Delta u = \int_{\partial\Omega} (\psi\nabla u - u\nabla\psi) \cdot n - u(0). \tag{6.3}$$

Consequência imediata de (6.3) é que se $u = \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ então o termo de borda é nulo e $-\int_\Omega \psi\Delta\phi = \phi(0)$, logo **$\psi$ é solução fundamental de pólo 0**. Por outro lado, temos o seguinte corolário:

Corolário 6.2. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ então*

$$u(x) = \int_\Omega \psi(y-x)[-\Delta u(y)] + \int_{\partial\Omega} [\psi(y-x)\nabla u(y) - u(y)\nabla\psi(y-x)] \cdot n. \quad (6.4)$$

e isso vale para todo $x \in \Omega$.

Esta é uma **fórmula de representação**: se $-\Delta u = f$ em Ω e $u = g, u_\nu = h$ em $\partial\Omega$, então

$$u(x) = \int_\Omega \psi(y-x)[f(y)] + \int_{\partial\Omega} [\psi(y-x)h(y) - g(y)\nabla\psi(y-x) \cdot n]. \quad (6.5)$$

Infelizmente não fornece uma solução explicita!

6.1 Função de Green

Suponhamos que, para todo $x \in \Omega$, exista uma solução fundamental $G(\cdot, x)$ de polo x satisfazendo $G(y, x) = 0$ para $y \in \partial\Omega$;

Usando G no lugar de ψ em (6.5) temos

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega G(y,x)[f(y)] - \int_{\partial\Omega} [g(y)\nabla_y G(y,x)] \cdot n \quad (6.6)}$$

G é chamada **função de Green para a região Ω**; vale então

Teorema 6.3. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ é solução do problema de Dirichlet (PD), então u é dado pela fórmula (6.6).*

Existe a função de Green?

Separando as duas parcelas da (6.6) obtemos a **fórmula integral de Green**, para a solução do problema de Dirichlet homogêneo para a equação de Poisson:

$$u(x) = \int_\Omega G(y,x)[f(y)] \tag{6.7}$$

e a **fórmula integral de Poisson**, para a solução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace:

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} [g(y)\nabla_y G(y,x)] \cdot n; \tag{6.8}$$

a função $H(y,x) = -\nabla_y G(y,x) \cdot n = -\frac{\partial G}{\partial n_y}(y,x)$ (com $x \in \Omega$ e $y \in \partial\Omega$) é dita **Núcleo de Poisson** para a região Ω.

A Função de Green pode ser encontrada somando a ψ_x uma função oportuna harmônica.

Em casos simples, explorando simetrias, pode ser obtida explicitamente:

- A **função de Green para um semiespaço** Ω é

$$G(y,x) = \psi(y-x) - \psi(y-x^*) \tag{6.9}$$

  onde x^* é o simétrico de x do outro lado do semiplano $\partial\Omega$.

- A **função de Green para uma bola semiespaço** $B = B_1(0)$ é

$$\begin{cases} G(y,x) := \psi(y-x) - \psi(|x|(y-x^*)) & \text{se } x \neq 0, \\ G(y,0) := \psi(y) - \widetilde{\psi}(1). \end{cases}$$

  onde $x^* = \frac{x}{|x|^2}$.

As funções de Green acima produzem uma solução do Problema de Dirichlet na bola e no semiplano.

6.2 Método de Perron - Princípio de Dirichlet - métodos variacionais

O **método de Perron** permite mostrar a existência de uma solução para o Problema de Dirichlet em um domínio limitado regular qualquer, com dato contínuo, usando o resultado na bola e aproximando via funções super-sub-harmônicas.

Outros métodos para mostrar existência de soluções nascem do **Princípio de Dirichlet**:

Sejam

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - uf,$$
$$\mathcal{A} = \left\{u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) : \ u|_{\partial\Omega = g}\right\};$$

Teorema 6.4. *se $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, vale o seguinte:*
–se $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfaz o problema de Dirichlet (PD) então $J(u) = min_{w\in\mathcal{A}} J(w)$.
– se $u \in \mathcal{A}$ atinge o mínimo acima, então é solução do problema de Dirichlet (PD).

Isso sugere a seguinte estratégia:
– mostro que $J|_\mathcal{A}$ é limitado para baixo e defino $c := \inf J|_\mathcal{A}$.
– logo existe $\{u_n\} \subseteq \mathcal{A}$: $J(u_n) \to c$.
– $\lim u_n$ é o mínimo?

Infelizmente este método não funciona muito bem com funções $\mathcal{C}^2$, pois o limite pode não ser regular.

Logo precisará trabalhar num espaço maior (que contenha todos os possíveis limites) onde a derivada será no sentido das distribuições. Fazendo assim encontraremos uma solução, e ainda precisará mostrar que é $\mathcal{C}^2$.

Método baseados em busca de pontos críticos para oportunos funcionais ainda podem ser usados para resolver problemas não lineares (**métodos variacionais**).