1 A equação do calor

Equação do calor em dimensão n:

$$u_t - \Delta_x u = F(x,t), \tag{1.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

- a equação (1.1) é sempre **parabólica**: as superfícies características são as superfícies $t = const$.
- a troca de variável $t \mapsto -t$ muda o sinal na equação, que se torna $u_t + \Delta_x u = F$; logo os problemas com $t > 0$ e com $t < 0$ são diferentes.
  Fisicamente este fato significa que **o tempo não é reversível** para os fenômenos descritos pela equação do calor (segunda lei da termodinâmica).

  Por outro lado, a equação é **invariante** com respeito a transformações do tipo $(x,t) \mapsto (ax, a^2 t)$ i.é, que mantêm a razão $|x|^2/t$.

Consideramos em geral o **problema de valores iniciais**

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{IVP-C}$$

- o problema (IVP-C) não é um problema de Cauchy, já que não fixamos u_t. Além disso é posto numa superfície característica.
- O fato de fixar apenas u é coerente com o fato que a equação é de primeira ordem na variável t.

Consideramos também o **problema misto** (condições iniciais e de fronteira) em um domínio limitado Ω:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t) & \textit{em} \;\; \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = g(x) & \textit{em} \;\; \overline{\Omega}, \\ u(x,t) = h(x,t) & \textit{em} \;\; \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{misto-C}$$

onde a condição em $\partial\Omega$ de tipo Dirichlet $u = h$ pode ser substituída por uma de tipo Neumann ($u_n = h$) ou Robin ($\alpha u + u_n = h$).

- Sejam $U_T = \Omega \times (0, T)$, $\Lambda_T = \Omega \times \{T\}$ e $\Gamma_T = \partial U_T \setminus \Lambda_T$:
as condições em (misto-C) são dadas exatamente em Γ_T, que é chamada de **fronteira parabólica de U_T**.

- o problema (misto-C) não é de nenhum dos tipos vistos até agora: não é um problema de Cauchy, nem um problema de Dirichlet pois falta a condição na borda superior Λ_T.

2 Modelos físicos

- Esta equação representa a **difusão de uma substância** ou a **transmissão do calor** num corpo ou no espaço todo.

- A condição $u(x, 0) = g(x)$ representa a distribuição de temperatura ou concentração no instante $t = 0$.

- O problema (IVP-C) modela, a difusão do calor no espaço todo

- O problema (misto-C) modela a condução de calor no corpo Ω, tendo fronteira a temperatura fixada (ou isolada, ou que troca calor com o ambiente externo).

- A equação (1.1) contém **aproximações**:
– vale na hipótese de átomos pontiformes e supõe que a velocidade de propagação do calor seja infinita (gas ideal).
– é invariante com respeito ao valor da incógnita: isso não é coerente com a física pois a temperatura é uma quantidade limitada por baixo

  Por isso a aproximação tornar-se-á ruim para temperaturas perto do zero absoluto.

- A **eq. de Black-Scholes** modela dinâmicas de mercados financeiros:

$$u_t + x^2 u_{xx} + x u_x - u = 0$$

  com a mudança de variáveis e incógnita
$\tau = -t, \qquad \xi = \ln(x) + \tau/2, \qquad w = u\, e^{\tau},$
torna-se $w_\tau - w_{\xi\xi} = 0$.

3 Solução fundamental

Definimos uma **solução generalizada** de $u_t - \Delta u = F$ da seguinte maneira:

Definição 3.1.
Dizemos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ é **solução no sentido das distribuições** de $u_t - \Delta u = F$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ se

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} u(x,t)[-\phi_t(x,t) - \Delta\phi(x,t)] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} F(x,t)\phi(x,t) \qquad \text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.1}$$

Podemos então definir também uma solução fundamental:

Definição 3.2. Chamamos **solução fundamental de pólo (p,θ)** (para a equação do calor), uma função $\psi_{(p,\,\theta)}$ que seja solução no sentido das distribuições de

$$\partial_t \psi_{(p,\,\theta)} - \Delta_x \psi_{(p,\theta)} = \delta_{(p,\,\theta)},$$

isto é,

$$\psi_{(p,\,\theta)} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1}) \quad e$$
$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \psi_{(p,\,\theta)}(y,\tau)[-\phi_\tau(y,\tau) - \Delta_y\phi(y,\tau)]dV_y d\tau = \phi(p,\,\theta)$$
$$\text{para toda } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{3.2}$$

Uma **solução fundamental da equação do calor de pólo** $(0,0)$ é a seguinte:

$$\psi(y,\tau) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi\tau)^{n/2}}\, e^{-\frac{|y|^2}{4\tau}} & \text{se } y \in \mathbb{R}^n,\ \tau > 0, \\ 0 & \text{se } y \in \mathbb{R}^n,\ \tau \leq 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

isto é,

Lema 3.3. *Para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ vale*

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \psi(y,\tau)[-\phi_t(y,\tau) - \Delta\phi(y,\tau)] = \phi(0,0)\,. \tag{3.4}$$

Observemos que

- ψ é singular na origem mas está em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\})$.
  ψ satisfaz a eq. do calor em todo $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$.
- para todo $\tau > 0$, a função $\psi(\cdot,\tau)$ é uma gaussiana radial simétrica, de integral unitário, centrada em $y = 0$ e de variância $\sigma^2 = 2\tau$,
- A função ψ em (3.3) é interpretada "fisicamente" como uma *solução gerada por uma fonte de calor pontiforme concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $x = 0$.*
- resumindo: a fonte pontiforme gera uma distribuição de temperatura gaussiana, simétrica, de integral constante, centrada no ponto da fonte e variância que aumenta com o tempo (a temperatura se espalha).

A prova do lema aproveita as propriedades acima e o seguinte

Lema 3.4. *Se $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{n+1})$ e é limitada então*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y,t)\phi(x+y,t)dV_y = \phi(x_0,0).$$

4 Problema de valores iniciais

4.1 O problema homogêneo

Consideremos o problema homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

- não é um problema de Cauchy, logo não temos nenhuma garantia de existência e unicidade, nem localmente.
- De fato, **as soluções não são únicas**, pois é possível construir infinitas soluções do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Proposição 4.1. *Se $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$ e é limitada então definindo $u(x,t)$ como*

$$\boxed{u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t) g(y) dV_y} \tag{4.3}$$

tem-se $\quad u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)), \quad u_t - \Delta_x u = 0$ *para todo* $t > 0$,

. $\quad \lim_{(x,t)\to(x_0,0^+)} u(x,t) = g(x_0)$.

Logo, (4.3) pode ser estendida por continuidade a uma solução $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ do problema (4.1).

- A diferença da equação da onda, a equação do calor apresenta uma **velocidade infinita de propagação das informações**: se $g \geq 0$ tem suporte compacto (mas não é nula), a solução (4.3) satisfaz $u(x,t) > 0$ para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Outra diferença com respeito à equação da onda é o **efeito regularizante**: é suficiente um dado contínuo para ter uma solução de classe $\mathcal{C}^\infty$ para todo $t > 0$.
- Uma consequência desta propriedade regularizante que, em geral, é **impossível resolver o problema (4.1) para tempos negativos**.

4.2 O problema com fonte

Para o problema não homogêneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), & \text{para } t > 0 \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

podemos usar de novo o **princípio de Duhamel**: neste caso uma solução na forma $u(x,t) = \int_0^t u^s(x,t)ds$ onde $u^s(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} u^s_t - \Delta_x u^s = 0, \\ u^s(x,s) = F(x,s) : \end{cases} \tag{4.5}$$

usando (4.3), $u^s(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t-s)F(y,s)dV_y$, logo a fórmula resultante é

$$\boxed{u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t-\tau)F(y,\tau)dV_y.} \tag{4.6}$$

Definimos $\mathcal{C}^{1t,2x}(U)$, sendo $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, o espaço das funções com derivada temporal contínua e derivadas espaciais de ordem um e dois contínuas.

Teorema 4.2. *Seja $F \in \mathcal{C}_0^{1t,2x}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, então (4.6) é de classe $\mathcal{C}^{1t,2x}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ e pode ser prolongada por continuidade a uma solução de (4.4).*

- Da fórmula (4.6) podemos de novo observar a **velocidade infinita de propagação e a direção do tempo**: uma fonte de calor que aparece no instante T não pode influenciar os instantes anteriores mas influencia imediatamente o espaço todo a partir desse instante.

- Observe que as fórmulas e as propriedades apenas dizem respeito à particular solução que encontramos, mas não dizem nada sobre as soluções em geral já que, como vimos, não temos unicidade.
  Veremos porém que existe apenas uma solução limitada.

5 Problema misto e princípios do Máximo

Seja Ω um domínio limitado e regular

Temos o seguinte **princípio do máximo**:

Teorema 5.1. *Se $u \in \mathcal{C}^{1t,2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ satisfaz $u_t - \Delta u \le 0$ em U_T, então*

$$\max_{(x,t)\in\overline{U_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t). \tag{5.1}$$

Como sempre, se $u_t - \Delta u \ge 0$ a afirmação (5.1) vale para os mínimos, e se $u_t - \Delta u = 0$ valem as duas.

Podemos deduzir do teorema 5.1 os seguintes resultados de **unicidade** e **dependência contínua dos dados**:

Teorema 5.2. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^{1t,2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ são soluções do problema (misto-C) com a mesma F e com dados, respectivamente, g_1, h_1 e g_2, h_2, então*

$$\max_{\overline{U_T}} |u_1 - u_2| \le \max \{|g_1 - g_2|, |h_1 - h_2|\}$$

Em particular, a solução de (misto-C) (se existir) é única na classe das soluções em $\mathcal{C}^{1t,2x}(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$.

Estes resultados valem também se no problema (misto-C) substituímos T por $+\infty$, já que valem para todo $T > 0$.

- O resultado acima mostra que o problema de Dirichlet para a equação do calor (isto é, impondo o valor de u em toda ∂U_T) seria mal posto.

- Podemos de novo deduzir que perturbações (fontes ou mudanças na borda) que acontecem num instante T, só podem influenciar a solução para $t \ge T$ e não para $t < T$.

- vemos também a asimetria do tempo: para ter dependência contínua, o dato deve ser imposto para $t = 0$ e não para $t = T$.

  O problema "atrás" não teria dependência contínua dos dados: considere $\Omega = [0, \pi]$, $F = 0$, $h = 0$ e $u(x,T) = \varepsilon \sin(nx)$, então

  $u(x,t) = \varepsilon \sin(nx) e^{n^2(T-t)}$ isto é, não existe nenhuma constante C tal que $|u(\cdot, T)| \le \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |u(\cdot, t)| \le C\varepsilon$ para $t \in [0, T]$.

Mais um resultado de regularidade:

Teorema 5.3. *Se* $u \in \mathcal{C}^{1t,2x}(\overline{U_T})$ *satisfaz* $u_t - \Delta u = 0$ *em* U_T *então* $u \in \mathcal{C}^\infty(U_T)$

Ideia da prova. multiplicando por uma oportuna translação de $\psi(x,-t)$ e usando fórmulas de Lagrange-Green obtemos a fórmula implícita de representação

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_\Omega u(y,0)\psi(x-y,t)+ \\ - \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega} [u(y,\tau)\nabla\psi(x-y,t-\tau) - \psi(x-y,t-\tau)\nabla u(y,\tau)] \cdot n\,. \end{aligned}$$

Como a região de integração fica longe da singularidade de ψ, o resultado é $\mathcal{C}^\infty$ $\square$

- de novo vemos o efeito regularizante: a solução é regular mesmo que os dados na borda sejam apenas $\mathcal{C}^2$ em x e $\mathcal{C}^1$ em t.
  Este resultado vale para qualquer solução, enquanto o da proposição 4.1 dizia apenas respeito à particular solução dada pela fórmula (4.3).

5.1 Princípio de Máximo para o problema em $\mathbb{R}^n$

Vejamos agora uma versão do princípio de máximo para o caso do problema em $\mathbb{R}^n$ (IVP-C).

Teorema 5.4. *Se* $u \in \mathcal{C}^{1t,2x}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *satisfaz* $u_t - \Delta u \le 0$ *em* $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ *e*

$$\text{existem } M, a > 0 \text{ tais que } \; u(x,t) \le M e^{a|x|^2} \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,T), \tag{5.2}$$

então

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,0) := S. \tag{5.3}$$

Observação 5.5. Como sempre, trocando o sinal, logo se $u_t - \Delta u = 0$ e (5.2) vale para $|u|$, então (5.3) também vale para $|u|$. $\lhd$

Consequência do teorema é **unicidade e dependência contínua dos dados** para o problema (IVP-C), na classe das funções em $\mathcal{C}^{1t,2x}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty)) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ que satisfazem $|u(x,t)| \le M e^{a|x|^2}$ para alguns M, a.

- vimos que (IVP-C) tem infinitas soluções, mas a obtida em (4.3) é limitada, logo é a única na classe acima: as outras não respeitam a condição.

5.2 Alguns resultados via energia

Como fizemos para a eq. da onda, podemos definir uma **energia para a eq. do calor em Ω:**

$$\boxed{E(t) := \frac{1}{2}\int_\Omega w^2(x,t)dx \geq 0 :}$$

então

$$E'(t) = \int_\Omega ww_t = \int_\Omega w(\Delta w + F) = \int_\Omega (-|\nabla w|^2 + Fw) + \int_{\partial\Omega} w\nabla w \cdot n\,. \quad (5.4)$$

se $F = 0$ e vale Dirichlet ou Neumann homogêneo em $\partial\Omega$ temos

$$E'(t) = -\int_\Omega |\nabla w|^2 \leq 0\,. \quad (5.5)$$

- se $E(0) = 0$ deduzimos $E \equiv 0$, logo $w \equiv 0$: obtemos um resultado de **unicidade** para (misto-C) com **Neumann ou Dirichlet**. O mesmo resultado vale para a condição de Robin com $\alpha \geq 0$.
- Comparando com a equação da onda, aqui a energia é definida integrando o quadrado da solução, no caso da onda era o quadrado do gradiente (nas $n+1$ variáveis).

  No caso da onda a energia era conservada, enquanto aqui a energia decresce sempre que a solução não é constante (por isso o tempo não pode ser invertido!)

  no caso com $F \neq 0$ (fontes de calor) pode entrar ou sair energia.