4ª Lista de Exercícios de SMA169 Equações diferenciais parciais

Eugenio Massa

Ondas e difusão.

1. Exercícios do livro:
   pag 38: ex 1,2,3,5,8.
   pag 41: ex 2,3,4,5.
   pag 52: ex 1,6,7,8.
   pag 55: ex 2.

2. Analise, usando o método da energia, o problema misto para onda e calor com condição na borda de tipo Robin, isto é, $\alpha u(x,t) + u_n(x,t) = 0 \ \ para \ \ x \in \partial\Omega, \ \ t > 0$.
   – No caso do calor, para que α podemos dizer que a energia decresce?
   – No caso da onda, corrija a definição de energia para que ainda seja constante.
   – Quando podemos dizer que a solução é única?

3. Considere a equação $u_{tt} - u_{xx} + \lambda u = 0$.
   a) Mostre que a função $\sin(kx - \omega t)$ é solução com $k = \pm\omega$ se e só se $\lambda = 0$.
   b) Mostre que se $\lambda \neq 0$, a função $\sin(kx - \omega t)$ é solução só se $\omega = \pm\sqrt{k^2 + \lambda}$.
   Este fenômeno se chama dispersão: o sinal $\sin(kx)$ viaja com velocidade 1 se $\lambda = 0$ mas com velocidade que depende de k se $\lambda \neq 0$ (logo uma sobreposição de senos viaja inalterada se $\lambda = 0$ mas muda de forma se $\lambda \neq 0$)

4. Considere a equação $u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t = 0$ com $\alpha \geq 0$ e o problema de Cauchy em $t = 0$.
   a) Mostre a unicidade de solução do problema de Cauchy mostrando que a solução com dados nulos em $B_t(x)$ é nula no cone do passado do ponto (x, t).
   b) Deduza que a velocidade de propagação é finita e então o suporte de $u(\cdot, t)$ é compacto se os dados do problema de Cauchy em $t = 0$ são a suporte compacto.
   c) Mostre que para dados a suporte compacto a energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u_t^2 + |\nabla_x u|^2$ é não crescente.
   — Considere a equação $u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_t + \lambda u = 0$.
   a) Mostre que se a solução regular $u(\cdot, t)$ tem suporte compacto para todo t, então a energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_t^2 + u_x^2 + \lambda u^2$ satisfaz $E'(t) = -\alpha \int_{\mathbb{R}} u_t^2$ (sugestão, vai precisar fazer uma integração por partes).

5. Considere o problema
   $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \\ u(x,0) = x^2\,, \qquad u_t(x,0) = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$
   Se definirmos $E_R(t) = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}[u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)]dx$, verifique que para todo $R > 0$ esta energia é crescente. (OBS: os dados não tem suporte compacto).

6. Resolva $u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ u(x,0) = e^{-x^2}, \ u_t(x,0) = 0$. Esboce o gráfico de $u(x,t)$ para diferentes valores de t.

7. (Dissipação) Encontre uma solução para $\begin{cases} u_t - u_{xx} + bu = 0 & em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R} \end{cases}$ para $b > 0$ (sugestão: ponha $u = e^{-bt}v$).

8. (Convecção) Encontre uma solução para $\begin{cases} u_t - u_{xx} + cu_x = 0 & em\ \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & em\ \mathbb{R} \end{cases}$ para $b > 0$ (sugestão: ponha $y = x - ct$).

9. Mostre que se $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ é limitada então a solução do IVP para a equação do calor dada por $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-y,t)g(y)dy$ satisfaz:

   a) Se também g tem suporte compacto, então $u(x,t)$ tende a zero uniformemente quando $t \to \infty$.

   b) Se também g é integrável em $\mathbb{R}$ então $u(x,t)$ tende a zero uniformemente quando $t \to \infty$.