1.ª Questão. (Valor: 2.0)
a) Mostre que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = h(u)\,, & em \;\; \Omega \\ u = 0\,, & em \;\; \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

não possui soluções positivas se $h(s) \leq 0$ para todo $s > 0$.
b) Supondo que exista $\phi \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ estritamente positiva em Ω, nula em $\partial\Omega$ e satisfazendo $-\Delta\phi = \phi$ em Ω, mostre que não existem soluções positivas de (1) se $h(s) < s$ para todo $s > 0$.
(para (a) e (b) suponha Ω conexo, limitado e regular e considere soluções de tipo $\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$).

1.ª Questão. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}} u = f(\mathbf{x}, t)\,, & em \;\; \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0\,, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \psi(\mathbf{x})\,, & em \;\; \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2}$$

onde f e ψ são funções regulares.
a) Suponha primeiro $f = 0$, que o suporte de ψ esteja contido na bola $B_1(0)$ e que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 0$: diga (para cada dimensão $n = 1, 2, 3$) para quais $(\mathbf{x}, t)$ pode garantir $u(\mathbf{x}, t) = 0$. (Justifique).
b) Suponha agora $\psi = 0$ e que o suporte de f esteja contido em $B_1(0) \times [1, 2]$: diga (para cada dimensão $n = 1, 2, 3$) para quais $(\mathbf{x}, t)$ pode garantir $u(\mathbf{x}, t) = 0$. (Justifique).

1.ª Questão. (Valor: 2.0)
Considere agora o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t)\,, & em \;\; \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \phi(x)\,, & em \;\; \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

sugira uma condição sobre ϕ e f que garanta que $u(\pi, t) = 2$ para todo $t > 0$, sem que u seja a constante 2 (justifique).