1 Algumas ferramentas e fórmulas

Teorema fundamental do cálculo integral / Teorema do divergente

$$\int_a^b f'\,dx = [f]_a^b \qquad\qquad \int_\Omega div(F)\,dV = \int_{\partial\Omega} (F\cdot n)\,dS$$

Integração por partes

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$\int_\Omega div(F)\,g\,dV = \int_{\partial\Omega} g(F\cdot n)\,dS - \int_\Omega F\cdot\nabla g$$

em particular

$$\int_a^b f''g = [f'g]_a^b - \int_a^b f'g'$$

$$\int_\Omega (\Delta f)\,g\,dV = \int_{\partial\Omega} g(\nabla f\cdot n)\,dS - \int_\Omega \nabla f\cdot\nabla g$$

´

Derivada de uma integral em domínio variável

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B_{g(t)}} f dV\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{g(t)} d\tau \int_{\partial B_\tau} f dS\right) = g'(t)\int_{\partial B_{g(t)}} f dS. \quad (1.1)$$

---

2 Modelos físicos - onda

- **vibrações longitudinais** de uma varinha ou de um gás (dim 1)
- **ondas** na superfície de um liquido (dim 2)
- **pequenas vibrações transversais** de uma corda ou uma membrana (dim 1,2)
- **vibrações** em um gás (dim 3)
- A equação quaselinear (aqui x,y espaciais, nao tem tempo)

  $$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2 u_{yy} = 0,$$

  substituindo $\varepsilon = u - Vx$ $(V > c)$, linearizando e reescalando dá

  $$-\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0 :$$

  modela **pequenas perturbações da solução supersónica** Vx.
- **Campos elétrico e magnético no vácuo**: das equações de Maxwell no vácuo

  $$\begin{array}{rr} div(E) = 0 & div(B) = 0 \\ rot(E) = -B_t & rot(B) = E_t/c^2\,, \end{array}$$

  obtemos $E_{tt}/c^2 = rot(B_t) = -rot(rot(E)) = \Delta E + \nabla(div(E)) = \Delta E.$

2.1 Problemas típicos - Onda

O **problema de valores iniciais em $\mathbb{R}^n$** para a eq. da onda é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) : \end{cases} \tag{PVI-O}$$

u e u_t são fixadas no instante $t = 0$.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior n,

O **problema misto em Ω** (de valores iniciais e de fronteria) para a eq. da onda é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{Ω-O}$$

3 Modelos físicos - Laplaciano/Calor/Difusão

- A equação do calor representa a **difusão de uma substância** ou a **transmissão do calor** num corpo ou no espaço todo.
- A equação com o Laplaciano (sem tempo) representa uma situação de equilíbrio de um fenômeno de **difusão** (p.e. **temperatura**);
- dado um campo vetorial V (em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) satisfazendo

$$\begin{cases} div\, V = f, \\ rot\, V = 0; \end{cases} \tag{3.1}$$

  a segunda equação implica que (pelo menos localmente) existe um potencial para V: $V = \nabla u$. A primeira equação torna-se $\Delta u = f$.

  - V é o **campo eletrostático** e f a representa a carga elétrica;
  - V representa o **escoamento estacionário irrotacional e incomprimível** de um fluido (neste caso f representa eventuais fontes ou "poços" de fluido).

- Ainda para a equação quaselinear

$$(c^2 - u_x^2)u_{xx} + c^2 u_{yy} = 0,$$

  substituindo $\varepsilon = u - Vx$ $(V < c)$, linearizando e reescalando dá

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} = 0 :$$

  modela **pequenas perturbações da solução subsónica** Vx.

- No problema (PD), com $f = 0$, $u(x)$ é o valor esperado de $g(P(x))$ onde $P(x)$ é o primeiro ponto onde uma partícula que sai de x com moto Browniano toca $\partial\Omega$.

3.1 Problemas típicos - Laplaciano

- **problema de Dirichlet**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u(x) = g(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PD}$$

  - distribuição de temperatura ao equilíbrio num corpo com fontes de calor f e **temperatura fixada na fronteira** $g(x)$
  - potencial eletrostático em Ω se a densidade de carga é f e **$\partial\Omega$ é um condutor** (logo o potencial é constante em $\partial\Omega$)

- **problema de Neumann**: determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ u_\nu(x) = h(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PN}$$

  onde ν é a normal externa de $\partial\Omega$.

  - **corpo isolado** termicamente (fluxo de calor nulo, isto é, derivada normal da temperatura nula)
  - campo elétrico ($E = \nabla u$) é conhecido em $\partial\Omega$.
  - para o fluido, $u_\nu = 0$ significa que o fluido não atravessa a fronteira, u_ν fixado é um **fluxo de fluido** entrando/saindo.

- **problema de Robin** determinar $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \;\; \Omega, \\ \alpha(x)u(x) + u_\nu(x) = \beta(x) & em \;\; \partial\Omega, \end{cases} \tag{PR}$$

  - quando o corpo **troca calor** com o exterior o fluxo de calor (derivada da temperatura) é proporcional á diferencia de temperatura com respeito à temperatura externa,

- problemas exteriores (fluido ao redor de um corpo)

4 Modelos físicos - Calor/difusão

- A equação do calor representa a **difusão de uma substância** ou a **transmissão do calor** num corpo ou no espaço todo.

  este modelo contém **aproximações**:

  – vale na hipótese de átomos pontiformes e supõe que a velocidade de propagação do calor seja infinita (gas ideal).

  – é invariante com respeito ao valor da incógnita: isso não é coerente com a física pois a temperatura é uma quantidade limitada por baixo

  Por isso a aproximação tornar-se-á ruim para temperaturas perto do zero absoluto.

4.1 Problemas típicos - Calor

- Consideramos em geral o **problema de valores iniciais**

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = g(x). \end{cases} \tag{IVP-C}$$

  que modela, a difusão do calor no espaço todo. A condição $u(x,0) = g(x)$ representa a distribuição de temperatura ou concentração no instante $t = 0$.

- Consideramos também o **problema misto** (condições iniciais e de fronteira) em um domínio limitado Ω:

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t) & em \quad \Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = g(x) & em \quad \overline{\Omega}, \\ u(x,t) = h(x,t) & em \quad \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \tag{misto-C}$$

  que modela a condução de calor no corpo Ω, tendo fronteira a temperatura fixada. A condição em $\partial\Omega$ de tipo Dirichlet $u = h$ pode ser substituída por uma de tipo Neumann ($u_n = h$: fluxo de calor imposto) ou Robin ($\alpha u + u_n = h$: troca de calor com o ambiente externo).