1 Limites derivadas e integrais de séries

Definição $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A à função $S(x)$:

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in A}\left|S(x)-\sum_{n=1}^{k} f_n(x)\right| = 0$$

Condição (apenas suficiente): **Test de Weiestrass**:

se $\sup_{x\in A}|f_n(x)| \leq a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente em A.

Teorema 1.1. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ convirja uniformemente em A,*

1) se x_0 é p.d.a de A e $\exists \lim_{x\to x_0} f_n = L_n$ então $\exists \lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n \in \mathbb{R}$

2) se f_n é cont. em A então S é cont. em A

3) se f_n integráveis em $[a,b]$ então S integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$$

CUIDADO: não vale que se f_n deriv. então S derivável!!!

Teorema 1.2. *Suponha que a série $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ com f_n deriváveis converge em pelo menos um ponto em $[a,b]$, enquanto $D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ converge uniformemente em $[a,b]$.*

Então S é derivável e $S' = D$.

2 Séries de Fourier

Valem as seguintes identidades:

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n, k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx) = 0 & \forall n \neq k \in \mathbb{N} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \pi & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2.1}$$

As funções

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \; \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

formam uma **família ortonormal** com respeito ao produto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$

Chamamos **Polinômio trigonométrico de ordem k**

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Chamamos **Série trigonométrica (ou de Fourier)**

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Suponhamos que S convirja uniformemente então posso integrar por séries obtendo (**Fórmulas de Euler - Fourier**)

$$\begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) = a_0\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos(nx) = a_n\pi \\ \int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin(nx) = b_n\pi \end{cases} \tag{2.2}$$

Definição:
dada $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente integrável,
chamamos **Série de Fourier de f** a Série trigonométrica S_f cujos coeficientes são calculados pelas (2.2) com f no lugar de S.

Mais em geral, num intervalo $[-L, L]$ as Fórmulas de Euler - Fourier tornam-se

$$\begin{cases} \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x) = a_0 \\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = a_n \\ \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} S(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) = b_n \end{cases} \tag{2.3}$$

e a série se escreve

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$$

Pergunta? qual é a relação entre f e S_f?

- f par $\Longrightarrow b_n = 0\ \forall\, n$ (S_f é uma série de cossenos, logo é par)
- f ímpar $\Longrightarrow a_n = 0\ \forall\, n$ (S_f é uma série de senos, logo é ímpar)
- se f tem descontinuitá e S_f conv. uniformemente, certamente não coincidem!

Porém, se f é regular, as coisas ficam melhores!

2.1 Teoria L^2

Teorema 2.1. *se f^2 é integrável em $[-\pi,\pi]$ então*

- $\sum a_n^2 + b_n^2$ *converge, logo* $a_n, b_n \to 0$,
  mas isso não garante a conv. unif!!

- $\int_{-\pi}^{\pi} (f-(S_f)_k)^2 \to 0$
  significa que $(S_f)_k \to f$ *na métrica gerada por* $< f, g >$

- $\int_{-\pi}^{\pi} (f-(S_f)_k)^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - (S_f)_k^2 \le \int_{-\pi}^{\pi} (f-T_k)^2$ *para qualquer outro pol trig do mesmo grau* T_k*:*
  significa que $(S_f)_k$ *é o polinômio trigonométrico de ordem* k *mais perto de* f *(da métrica gerada por* $< f, g >$*)*

- $\int_{-\pi}^{\pi} (S_f)_k^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n^2 + b_n^2 \right)$
  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 \right)$
  $\int_{-\pi}^{\pi} f^2 \ge \int_{-\pi}^{\pi} (S_f)_k^2 \nearrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2$

Dito de outra forma: o sistema

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \qquad n \in \mathbb{N}$$

forma uma **base Hilbertiana** no espaço $X = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^2 < \infty \right\}$ dotado do produto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} fg$.

Os resultados acima correspondem (a menos da adimensionalização nas formulas (2.2)) ao fato que dado o sistema $\{e_i\}$ ortonormal em X, se $f = \sum \alpha_i e_i$ então $< f, e_i >= \alpha_i$ e $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ é a projeção de f no subespaço gerado por $e_1, .., e_k$ e converge a f quando $k \to \infty$.

Poderíamos fazer a mesma construção usando uma qualquer outra base hortonormal!

2.2 Convegência pontual e uniforme

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$, contínua (exceto em um número finito de pontos em $[-\pi, \pi]$, nos quais existem finitos os limites laterais)

Teorema 2.2. *se f é contínua e existem finitas as derivádas laterais em x_0 então S_f converge a f em x_0.*

Teorema 2.3. *Se f é contínua, e além disso é derivável exceto em um número finito de pontos (em $[-\pi, \pi]$), nos quais existem as derivadas laterais.*

Então S_f converge a f uniformemente.

Teorema 2.4. *Seja $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, 2π periódica.*

Então os coeficientes satisfazem

$$|a_n, b_n| \leq \frac{2\pi |f''|_\infty}{n^2}$$

e logo $S_f \to f$ uniformemente em $\mathbb{R}$.

3 exemplos

- $f = sgn(x)$ em $[-\pi, \pi]$: $a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi}[1 - \cos(n\pi)]$, isto é, $\frac{4}{n\pi}$ só para n ímpar.
- $f = |x|$ em $[-\pi, \pi]$: $b_n = 0$, $a_0 = \pi$, $a_n = \frac{2}{n^2\pi}[\cos(n\pi) - 1]$, isto é, $-\frac{4}{n^2\pi}$ só para n ímpar.
- $f = x$ em $[-\pi, \pi]$: $a_n = 0$, $b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$, isto é, $-(-1)^n\frac{2}{n}$.

4 escritura complexa

Pondo

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_0}{2} & n = 0 \\ \frac{a_n - ib_n}{2} & n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & n < 0 \end{cases} \qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) e^{-inx}$$

obtemos

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

No caso em $[-L, L]$ seria

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} S(x) e^{-inx\frac{\pi}{L}}$$

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx\frac{\pi}{L}}$$