Notação de multi-índice

Um **multi-índice** será um elemento do *conjunto de multi-índices*:

$$MI_n = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n : \quad \alpha_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Definimos:

- base canônica: $e_i = (0, .., 1, ..0)$ com 1 na i-ésima posição.
- *Módulo* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $\qquad |\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.
- *Fatorial* do multi-índice $\alpha \in MI_n$: $\qquad \alpha! := \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$.
- *Potência* de um vetor elevado a um multi-índice: dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in MI_n$, $\qquad x^\alpha := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$.
- *Operador de derivação* com multi-índice: dada $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (suficientemente regular para não importar a ordem de derivação): $\qquad \partial^\alpha u := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$, $\qquad$ onde $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Também usaremos a notação u_x, u_{xy}, $u_{x_i x_j}$, ... para as derivadas parciais de u com respeito às variáveis indicadas, ∇u para o vetor gradiente e ∂_{x_i} ou ∂_i para os operadores de derivação.

Definição 0.1. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, uma **equação diferencial parcial de ordem** k é uma equação da forma

$$F\left(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right) = 0, \tag{0.1}$$

Definição 0.2. Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (sendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$) é uma **solução clássica** de (0.1), quando

- as $\partial^\alpha u$ existem para todo $\alpha \in MI_n$ com $|\alpha| \le k$; (às vezes pediremos também $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$),
- a equação (0.1) está bem definida e satisfeita em Ω, isto é,

$$F\left(\mathbf{x}, (\partial^\alpha u(\mathbf{x}))_{|\alpha|\le k}\right) = 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega.$$

Tipo de não linearidade

- **linear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(\mathbf{x})\, \partial^\alpha u = f(\mathbf{x}),$$

  onde a_α e f podem depender de $\mathbf{x} \in \Omega$ apenas;

- **linear e homogênea**, se é da forma acima com $f = 0$.
- **linear a coeficientes constantes**, se é linear e os a_α não dependem de $\mathbf{x}$;
- **semilinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x})\partial^\alpha u + G\left(\mathbf{x}, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}\right) = 0 :$$

  isto é, é linear pelo menos nos termos de grau máximo;

- **quaselinear**, se é da forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(\mathbf{x}, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k})\partial^\alpha u + H\left(\mathbf{x}, (\partial^\beta u)_{|\beta|<k}\right) = 0 :$$

  isto é, os coeficientes a_α com $|\alpha| = k$ dependem de $\mathbf{x} \in \Omega$ e de $(\partial^\beta u)_{|\beta|<k}$, mas não de $(\partial^\beta u)_{|\beta|=k}$;

- **totalmente não-linear**, quando nenhum dos casos anteriores ocorre.

Princípio de sobreposição:

Seja

$$\mathcal{L}u = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(\mathbf{x})\, \partial^\alpha u = 0$$

uma equação linear homogênea:

- se v, w são soluções da equação linear homogênea $\mathcal{L}u = 0$ então $a\,v + b\,w$ também é, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$
- se v é solução de uma equação linear homogênea $\mathcal{L}u = 0$ e w é solução de $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$, então $v + w$ também é solução de $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$,
- se v é solução $\mathcal{L}u = f(\mathbf{x})$, e w é solução de $\mathcal{L}u = g(\mathbf{x})$, então $a\,v + b\,w$ é solução de $\mathcal{L}u = a\,f(\mathbf{x}) + b\,g(\mathbf{x})$,

Exemplos importantes

- $u_t + xu_x = f(x,t)$ **transporte linear**
- $u_t + u\,u_x = f(x,t)$ **transporte quaselinear**
- $\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2 u = 0$ **equação de Laplace** (em $\mathbb{R}^3: \ u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$)
- $\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u = 0$ **equação da onda** (em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2: \ u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0$)
- $\partial_t u - k\Delta_x u = 0$ **equação do calor** (em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2: \ u_t - u_{xx} - u_{yy} = 0$)
- $|\nabla u| = 1$: **equação da ótica geométrica**
- $(c^2 - u_x^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (c^2 - u_y^2)u_{yy} = 0$: **eq. do potencial aerodinâmico compressível** (c é a velocidade do som)
- $u_t + x^2 u_{xx} + xu_x - u = 0$ **eq. de Black-Scholes**

Tipos de problemas

Queremos estudar o tipo de condições necessárias para obtermos existência, unicidade e dependência contínua dos dados (definição de **problema bem posto segundo Hadamard**).

Alguns exemplos

Seja $f_n(x) = e^{-\sqrt{n}}\sin(nx)$. Considere os problemas

$$(L) \begin{cases} u_{yy} + u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (O) \begin{cases} u_{yy} - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ u_y(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ u(x,0) = f_n(x) & \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Solução

(L) $u(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\sin(nx)\sinh(ny)$

(O) $u(x,y) = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\sin(nx)\sin(ny)$

(C) $u(x,y) = e^{-\sqrt{n}}\sin(nx)e^{-n^2y}$

Equação $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2}$

A solução geral é $u(x,y) = f(y)$.

1) Problema $\boxed{u(0,y) = \varphi(y)}$

2) Problema $\boxed{u(x,0) = \psi(x)}$

(polinômio característico $\chi_L(a,b) = a$)

Equação $\boxed{\partial^2_{xy} u = 0}$ com $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

A solução geral é $u(x,y) = f(x) + g(y)$

1) Problema $\boxed{u(0,y) = \varphi(y),\ u_x(0,y) = \psi(y)}$

2) Problema $\boxed{u(x,x) = \varphi(x),\ u_x(x,x) = \psi(x)}$

solução $u(x,y) = \Psi(x) - \Psi(y) + \varphi(y)$

Definição 0.3. Dadas uma equação $F\left(x, (\partial^\alpha u)_{\alpha \in A_n(k)}\right) = 0$, uma hipersuperfície S em $\mathbb{R}^n$ de codimensão 1 e k funções $\phi_0, \phi_1, ..., \phi_{k-1} : S \to \mathbb{R}$, chamamos **problema de Cauchy** para a equação acima, o problema de encontrar uma solução definida numa vizinhança V_S de S e que satisfaça

$$\partial_\nu^i u = \phi_i, \quad \forall i = 0, 1, ..., k-1, \quad \text{em } S$$

onde ν é o vetor normal a S.
Chamaremos de **dados de Cauchy** as funções ϕ_i e de **superfície dos dados** a superfície S.

Formulação do Problema de Cauchy
Superfície S qualquer:

$$\begin{cases} F\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k}\right) = 0 \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i \qquad\qquad \textit{em } S \quad (i = 0, 1, ..., k-1), \end{cases} \tag{0.2}$$

Hiperplano $\left\{\mathbf{x} = (\xi, t) : \ \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, \ t = 0\right\}$:

$$\begin{cases} F\left((\xi, t), (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k}\right) = 0 \\ \partial_t^i u(\xi, 0) = \varphi_i(\xi) \qquad \textit{para } \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \quad (i = 0, 1, ..., k-1). \end{cases} \tag{0.3}$$

Com os dados de Cauchy ficam fixadas em S todas as derivadas nas direções tangentes e normais, até a ordem k, exceto a ∂_ν^k

Definição 0.4. Diremos que o problema de Cauchy é **não-característico** num ponto $\mathbf{x}_0 \in S$ quando a equação, em $\mathbf{x}_0$, pode ser resolvida com respeito à derivada $\partial_\nu^k u$; será **característico** quando não é possível.

O problema é **não-característico** se for não-característico em todo ponto de S.

1 Teorema de Cauchy-Kowalevski

Teorema 1.1. *(Cauchy-Kowalevski) Se no Problema (0.2)*

$$\begin{cases} F\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\le k}\right) = 0 & \\ \partial_\nu^i u = \varphi_i & \text{em } S \quad (i = 0, 1, ..., k-1), \end{cases} \tag{0.2}$$

os dados φ_j e a superfície S são analíticos em vizinhança de $x_0 \in S$, a função F é analítica em vizinhança destes dados e a condição de não-característicidade está satisfeita em $x_0 \in S$, então existe uma vizinhança de x_0 na qual o problema possui exatamente uma solução analítica.