1 Equação da onda

Equação da onda em dimensão (espacial) n:

$$\Box u := u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t) \tag{eq-O}$$

onde $u = u(x,t)$ e x é um vetor em $\mathbb{R}^n$.

- O operador $\Box$ é dito **operador de D´Alambert**.
- A equação (eq-O) é sempre (normalmente) **hiperbólica**.

O **problema de valores iniciais em $\mathbb{R}^n$** para a eq. da onda é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x) : \end{cases} \tag{PVI-O}$$

u e u_t são fixadas no instante $t = 0$.

Podemos resolver apenas para $t > 0$, pois trocando t por $-t$ o problema não muda.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior n,

O **problema misto em Ω** (de valores iniciais e de fronteria) para a eq. da onda é

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{Ω-O}$$

2 A equação do calor

Equação do calor em dimensão (espacial) n:

$$u_t - \Delta_x u = F(x,t) \tag{eq-C}$$

onde $u = u(x,t)$ e x é um vetor em $\mathbb{R}^n$.

- O operador $\partial_t - \Delta_x$ é dito **operador do calor**.
- A equação (eq-C) é sempre **parabólica**.

O **problema de valores iniciais em $\mathbb{R}^n$** para a eq. do calor é

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{PVI-C}$$

u apenas é fixadaa no instante $t = 0$.

OBS. trocando t por $-t$ o problema muda: $-u_t - \Delta_x u = F(x,-t)$.

Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto conexo limitado e regular, de borda $\partial\Omega$ e normal exterior n,

O **problema misto em Ω** (de valores iniciais e de fronteria) para a eq. do calor é

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{Ω-C}$$

2.1 Significado Físico

Onda:

- **vibrações** (corda, varinha, membrana, ar..):
  – as condições iniciais representam posição e velocidade inicial.

- (Ω-O) representa por exemplo a vibração de uma corda ($\Omega = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$) ou uma membrana ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$) com borda fixada
  Podemos também considerar diferentes condições em $\partial\Omega$:
  – $u(x, t) = h(x, t)$: borda com movimento prescrito
  – $u_n(x, t) = 0$: borda solta
  – $u_n(x, t) = h(x, t)$: borda com força prescrita

- **Campos elétrico e magnético no vácuo**: Neste caso as condições iniciais representam as condições iniciais para o campo elétrico e o magnético ($E_t = c^2\, rot\, B$).

Calor:

- **difusao** (calor ou poluente) num corpo ou no espaço todo: a condição inicial representa temperatura (ou concentração) inicial.

- (Ω-C) representa por exemplo um corpo com temperatura 0 na borda.
  Podemos também considerar diferentes condições em $\partial\Omega$:
  – $u(x, t) = h(x, t)$: borda com temperatura prescrita (P. de Dirichlet)
  – $u_n(x, t) = 0$: borda isolada
  – $u_n(x, t) = h(x, t)$: fluxo de calor prescrito na borda (P. de Neumann)
  – $\alpha(x)u(x, t) + u_n(x, t) = \beta(x)$ troca de calor com o ambiente externo (P. de Robin)

3 Energias

Considere uma solução de (Ω-O) com $F \equiv 0$.

Então a quantidade

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla_x u|^2\right)$$

é conservada no tempo (o mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ no lugar de $u = 0$).

E representa a **energia total** contida no sistema:

- en cinética mais energia elástica no caso de vibrações de corpos
- energia eletromagnética no caso do campo eletromagnético

Ela se conserva nesta situação.

Considere uma solução de (Ω-C) com $F \equiv 0$.

Então a quantidade

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2$$

é não crescente no tempo:

$$E'(t) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq 0$$

(o mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ no lugar de $u = 0$).

————————-

Outra possibilidade é definir

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

também é não crescente no tempo:

$$E'(t) = -\int_\Omega u_t^2 \leq 0$$

(o mesmo vale se $u_n = 0$ em $\partial\Omega$ no lugar de $u = 0$).

No caso do calor, E não representa uma **energia** física, mas é uma quantidade que nesta situação apenas pode decrescer.

Repare que isso significa que o tempo não pode ser invertido!

3.1 Unicidade

Dos resultados de energia podemos obter resultados de unicidade:

Sejam v, w soluções de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x \in \Omega, \\ u(x,t) = h(x,t) \quad [ou\ u_n(x,t) = h(x,t)] & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

então $d = v - w$ satisfaz

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \quad [ou\ u_n(x,t) = 0] & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

– então $E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \left(d_t^2 + |\nabla_x d|^2 \right)$ é constante.
– Mas $E(0) = 0$ pelas condições iniciais.
– Logo $E(t) \equiv 0$ para todo $t > 0$.
– Então $d(x,t) \equiv 0$ para todo $t > 0$.

Conclusão, **apenas uma solução do problema (3.1) pode existir.**

Sejam v, w soluções de

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = h(x,t) \quad [ou\ u_n(x,t) = h(x,t)] & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

então $d = v - w$ satisfaz

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = 0, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,0) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,t) = 0 \quad [ou\ u_n(x,t) = 0] & x \in \partial\Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

– então $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega d^2$ é não crescente.
– Mas $E(0) = 0$ pelas condições iniciais.
– Logo $E(t) \equiv 0$ para todo $t > 0$ (ela não pode ser negativa!).
– Então $d(x,t) \equiv 0$ para todo $t > 0$.

Conclusão, **apenas uma solução do problema (3.3) pode existir.**

Exercício: analise o caso da condição na borda de tipo Robin:
– quando podemos dizer que a energia decresce?
– quando podemos dizer que a solução é única?

3.2 Energia para a onda em $\mathbb{R}^n$

Definimos:

- $\boxed{\text{Cone do passado}}$ do ponto (x_0, t_0) a região

$$CP_{x_0,t_0} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \leq t_0 - |x - x_0|\}$$

- $\boxed{\text{Cone do futuro}}$ do ponto (x_0, t_0) a região

$$CF_{x_0,t_0} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq t_0 + |x - x_0|\}$$

Derivada de uma integral em domínio variável

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{B_{g(t)}} f dV\right) = \frac{d}{dt}\left(\int_0^{g(t)} d\tau \int_{\partial B_\tau} f dS\right) = g'(t)\int_{\partial B_{g(t)}} f dS. \qquad (3.5)$$

Teorema 3.1. *Se $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ $(n \geq 1)$ e satisfaz*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times [0,T], \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{em } \overline{B_R(x_0)} \end{cases} \qquad (3.6)$$

com $R \leq T$, então $u \equiv 0$ em $CP_{x_0,R}$.

Observação 3.2. O teorema 3.1 implica nos seguintes importantes resultados.

- O problema (PVI-O) possui no máximo uma **única solução**
- A solução de (PVI-O) num ponto (x,t) depende apenas dos dados ϕ, ψ e de F em $CP_{x,t}$.
  Viceversa, os dados ϕ, ψ no ponto $(x,0)$ influenciam u apenas em $CF_{x,0}$ e F no ponto (x,t) influencia apenas em $CF_{x,t}$.
- **a velocidade de propagação das informações é finita**
- Se ϕ, ψ e F possuem *suporte compacto*, então a solução $u(\cdot,t)$ também terá suporte compacto para todo $t > 0$.

  Neste caso podemos definir a **energia** da solução

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left[u_t^2(\cdot,t) + |\nabla u(\cdot,t)|^2\right],$$

logo podemos calcular (o termo de borda será nulo)

$$\frac{d}{dt}E = \int_{\mathbb{R}^n} [u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t] = \int_{\mathbb{R}^n} u_t(\underbrace{u_{tt} - \Delta u}_{=F}). \tag{3.7}$$

Concluímos que **se $F = 0$ e ϕ, ψ têm suporte compacto então E é uma quantidade conservada**.

$\triangleleft$

4 A equação da onda homogênea em uma dimensão

Consideremos (PVI-O) com $n = 1$ e com o parâmetro c^2 que representa a velocidade de propagação das ondas:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

A solução completa é

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+ct) + \phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi\,;$$

esta fórmula é dita **fórmula de D´Alambert** (para o caso homogêneo)

Da fórmula de D´Alambert podemos obter várias informações.

- Para ter solução de (4.1) de classe $\mathcal{C}^2$ **os dados deverão ser pelo menos $\phi \in \mathcal{C}^2$, $\psi \in \mathcal{C}^1$**. Analogamente, dados $\phi \in \mathcal{C}^k$, $\psi \in \mathcal{C}^{k-1}$ implicarão em solução de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$.
- **A solução no ponto (x,t) depende:**
  - de ϕ apenas nos dois pés das características por (x,t),
  - de ψ ao longo do segmento entre estes dois pontos,
- A solução com $F = 0$ está na forma $f(x+ct) + g(x-ct)$, de fato as coordenadas características $z = x + ct$ e $w = x - ct$ levam a eq. na forma $u_{zw} = 0$
- sabemos que a solução é única e que temos uma fórmula explicita, logo podemos deduzir da fórmula a **dependência contínua dos dados**.

5 A equação do calor homogênea em uma dimensão

Consideremos (PVI-C) com $n = 1$:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{5.1}$$

São soluções da eq. $u_t - u_{xx} = 0$:

- translações de soluções,
- derivadas de soluções,
- combinações lineares de soluções, logo também integrais de soluções (limite de somas),
- composições de soluções com mapas da forma $(x,t) \mapsto (ax, a^2 t)$ com $a > 0$.

Procuramos solução na forma $Q(x,t) = q\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$ de

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \\ u(x,0) = Sc(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}. \end{cases} \tag{5.2}$$

Introduzimos a função Erf como

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \ :$$

a solução de (5.2) é (para $t > 0$)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} Erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-r^2}\, dr = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-r^2}\, dr\, .$$

$$\phi(x) = D\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, Sc(x-\xi)\, d\xi\right) .$$

$$u(x,t) := D_x\left(\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, Q(x-\xi,t)\, d\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\, Q_x(x-\xi,t)\, d\xi \tag{5.3}$$

Observe que

$$\psi(x,t) := Q_x(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}\,,$$

logo de (5.3) obtemos uma solução para (PVI-C):

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\phi(\xi)d\xi \tag{5.4}$$

Observemos que

- Podemos prolongar ψ a todo $\mathbb{R}^2$:

$$\psi(x,t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{se } x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n,\ t \leq 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

  desta forma é singular na origem mas **está em $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ e satisfaz a eq. do calor em todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.**

- ψ é dita **Solução fundamental** (ou função fonte), da eq. do calor. Podemos interpretar "fisicamente" ψ como uma **solução gerada por uma fonte de calor pontiforme concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $x = 0$.**

- Para todo $t > 0$, a função $\psi(\cdot,t)$ é uma **gaussiana, de integral unitário, centrada em $x = 0$ e de variância $\sigma^2 = 2t$.**

- Resumindo: a fonte pontiforme gera uma distribuição de temperatura gaussiana, simétrica, de integral constante, centrada no ponto da fonte e variância que aumenta com o tempo (a temperatura se espalha).

- A solução (5.4) de (5.1) é de **classe $\mathcal{C}^\infty$ para todo $t > 0$.** Existe para qualquer ϕ integrável em $\mathbb{R}$ (ou até com crescimento polinomial ou exponencial).

- A solução (5.4) no ponto (x,t) **depende de ϕ em todo $\mathbb{R}$.**

5.1 Comparação Onda Calor em $\mathbb{R}$

Na equação da onda

- as informações propagam com **velocidade finita**, ao longo das **curvas características** $x = \pm ct$.
  se ϕ, ψ tem suporto compacto $u(\cdot, t)$ também tem.
- a condição inicial é **transportada sem perda**.
- a solução tem **regularidade proporcional à regularidade de** ϕ, ψ
- o **tempo é reversível**
- **unicidade e dependência contínua dos dados**

Na equação do calor

- as informações propagam com **velocidade infinita**.
  Logo mesmo se ϕ tem suporto compacto $u(\cdot, t)$ não tem.
- a condição inicial **espalha, decai, disperde**.
- a solução tem **regularidade** $\mathcal{C}^\infty$ **até com** ϕ **descontínua.**
- o **tempo não é reversível**: solução só para $t > 0$
- não provamos unicidade e dependência contínua dos dados (não tem!)

6 Problema com fonte

Consideremos (PVI-O) com $n = 1$ e com o parâmetro c^2:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x). \end{cases}$$

A solução completa é

$$u(x,t) = \frac{\phi(x+ct) + \phi(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t ds \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(\xi,s)d\xi;$$

esta fórmula é dita **fórmula de D´Alambert** (completa).

Vemos que:

- a solução em x, t depende de F no cone do passado do ponto (x,t)
- Para ter solução de classe $\mathcal{C}^2$ **F deverá ser pelo menos $\mathcal{C}^1$**. Analogamente, para ter solução de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 2)$ precisa $F \in \mathcal{C}^{k-1}$.
- de novo, sabemos que a solução é única e que temos uma fórmula explicita, logo podemos deduzir da fórmula a **dependência contínua dos dados**.

Consideremos (PVI-C) com $n = 1$:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{6.1}$$

A solução completa é

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} \psi(x-\xi,t-s)F(\xi,s)d\xi$$

Vemos que

- interpretação qualitativa:*a fonte de calor $F(\xi,s)$ é como uma condição inicial posta no instante s que produz a solução $\int_{\mathbb{R}} \psi(x-\xi,t-s)F(\xi,s)dx$ para $t > s$ e todas estas soluções são sobrepostas.*
- Da fórmula podemos de novo observar a **velocidade infinita de propagação e a direção do tempo**: uma fonte de calor que aparece no instante T não pode influenciar os instantes anteriores mas influencia imediatamente o espaço todo a partir desse instante.

Usando separação de variáveis, chegamos ao resultado (N finito!)

Se, no caso do calor, a condição inicial for

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx)\,, \tag{6.2}$$

então a (única) solução será

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx)\,. \tag{6.3}$$

No caso da onda, com condições

$$u(x,0) = \phi(x) = \sum_{n\in N} a_n \sin(nx), \qquad u_t(x,0) = \psi(x) = \sum b_n \sin(nx) \tag{6.4}$$

teremos a (única) solução

$$u(x,t) = \sum_{n\in N} \left[a_n \cos(nt) + \frac{b_n}{n} \sin(nt) \right] \sin(nx)\,. \tag{6.5}$$

Se $N = \mathbb{N}$ precisa discutir a convergência das séries.

7 Princípios do Máximo para o calor

Sejam $U_T = \Omega \times (0, T)$, $\Lambda_T = \Omega \times \{T\}$ e $\Gamma_T = \partial U_T \setminus \Lambda_T$:
Γ_T, é chamada de **fronteira parabólica de U_T**.

Temos o seguinte **princípio do máximo**:

Teorema 7.1. *Se $u \in \mathcal{C}^2(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ satisfaz $u_t - \Delta u \leq 0$ em U_T, então*

$$\max_{(x,t)\in\overline{U_T}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\Gamma_T} u(x,t). \tag{7.1}$$

Se $u_t - \Delta u \geq 0$ a afirmação (7.1) vale para os mínimos, e se $u_t - \Delta u = 0$ valem as duas.

Podemos deduzir do teorema 7.1 os seguintes resultados de **unicidade** e **dependência contínua dos dados**:

Teorema 7.2. *Se $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(U_T) \cap \mathcal{C}^0(\overline{U_T})$ são soluções do problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u = F(x,t), & x \in \Omega,\ t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in \Omega, \\ u(x,t) = h & x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T). \end{cases}$$

com a mesma F e com dados, respectivamente, ϕ_1, h_1 e ϕ_2, h_2, então

$$\max_{\overline{U_T}} |u_1 - u_2| \leq \max \{|\phi_1 - \phi_2|, |h_1 - h_2|\}$$

Em particular, a solução é única.

Estes resultados valem também se substituímos T por $+\infty$, já que valem para todo $T > 0$.