# 1 A equação da onda em dimensão três

A solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \\ u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \tag{PVIh-O}$$

quando $n > 1$ **e ímpar** pode ser obtida aproveitaremos a invariância por rotações do Laplaciano e várias identidades diferenciais.

## 1.1 Ferramentas necesárias

- Seja $\omega_n = \int_{\partial B_1} dS$: medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$,
  ($\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$, ..)
  A medida de uma esfera de raio $r$ será $\omega_n r^{n-1}$
  A medida de uma bola de raio $r$ será $\frac{\omega_n}{n} r^n$.
- Seja $\displaystyle ⨍_A f dA = \frac{\int_A f dA}{|A|}$: a **média de $f$ em $A$**.

**Definição 1.1.** Sejam $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$; definimos **média esférica** de $f$, de centro $x$ e raio $r$ a quantidade

$$M_f(x,r) := ⨍_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y \quad \left( = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} f(x + r\eta)\, dS_\eta \right).$$

- Se $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ então $M_f(x,r) \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.
- podemos estender $M_f(x,r)$ para todo $r \in \mathbb{R}$ como uma função par e contínua com $M_f(x,0) = f(x)$.
- Se $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$

$$\partial_r ⨍_{\partial B_r(x)} f(y) dS_y = \frac{r}{n} ⨍_{B_r(x)} \Delta f(y)\, dV_y.$$

$$\partial_r \left( r^{n-1} \partial_r M_f \right) = (\ldots) = r^{n-1} M_{\Delta f};$$

enfim

$$\Delta_x M_f(x,r) = \left( \partial_r^2 + \frac{n-1}{r} \partial_r \right) M_f(x,r)$$

para todo $r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$.

**Corolário 1.2.** *Se* $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ *então* $\Box u = 0$ *se e só se*

$$\left(\partial_r^2 + \frac{n-1}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t) = \partial_t^2 M_u(x,r,t), \qquad \text{para } r > 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

*onde a média é feita apenas na variável* $x$.

agora com n=3 temos

$$r\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right) M_u(x,r,t) = \partial_r^2[rM_u(x,r,t)] = \partial_t^2[rM_u(x,r,t)], \tag{1.2}$$

$$\text{para } r > 0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

Deduzimos que a quantidade $[rM_u(x,r,t)]$ satisfaz, para todo $x$, a equação da onda em dimensão um nas variáveis $r, t$. Logo podemos encontrá-la usando a fórmula de D´Alambert.

Definamos

$$V(x,r,t) := [rM_u(x,r,t)]\,.$$

Vale então

$$\begin{cases} V_{tt}(x,r,t) - V_{rr}(x,r,t) = 0, \\ V(x,r,0) = F(x,r), \\ V_t(x,r,0) = G(x,r) \end{cases} \tag{1.3}$$

onde

$$\begin{cases} F(x,r) := \left[rM_\phi(x,r)\right], \\ G(x,r) := \left[rM_\psi(x,r)\right]; \end{cases} \tag{1.4}$$

Aplicando a fórmula de D´Alambert temos que a solução é

$$V(x,r,t) = \frac{F(x,r-t)+F(x,r+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} G(x,\xi)d\xi\,. \tag{1.5}$$

Precisamos agora voltar a obter $u$:

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} M_u(x,r,t) = \lim_{r\to 0}\frac{V(x,r,t)}{r} \tag{1.6}$$

Concluímos que

$$u(x,t) = \left[\partial_t F(x,t) + G(x,t)\right], \tag{1.7}$$

isto é,

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B_t(x)} \phi\, dS\right) + t\fint_{\partial B_t(x)} \psi\, dS; \tag{1.8}$$

explicitando a derivada

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} \left[\phi(y)+t\nabla\phi(y)\cdot\vec{n}+t\psi(y)\right] dS_y = \fint_{\partial B_t(x)} \left[\phi(y)+\nabla\phi(y)\cdot(y-x)+t\psi(y)\right] dS_y; \tag{1.9}$$

esta é chamada **fórmula de Kirchhoff** (onda n=3) .

**Teorema 1.3.** *Se $n=3$, $\phi\in\mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n)$ e $\psi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ então existe uma solução $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^n\times(0,\infty)\right)$ de (PVIh-O) e é data pela (1.8).*

## 2 A equação da onda em dimensão dois

Quando $n$ é par, podemos deduzir a solução do caso em dimensão $n+1$ supondo que tudo seja constante com respeito a uma das variáveis (método de descida ou de Hadamard).

Procuremos então a solução $u(\mathbf{x},t)$ (com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $n$ par) de (PVIh-O) através da solução $\widetilde{u}(\mathbf{x},z,t)$ de

$$\begin{cases} \widetilde{u}_{tt} - \Delta_x \widetilde{u} - \widetilde{u}_{zz} = 0, \\ \widetilde{u}(\mathbf{x},z,0) = \widetilde{\phi}(\mathbf{x},z) := \phi(\mathbf{x}), \\ \widetilde{u}_t(\mathbf{x},z,0) = \widetilde{\psi}(\mathbf{x},z) := \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{2.1}$$

A solução existe pelo teorema 1.3 e da fórmula (1.8) podemos deduzir que $\widetilde{u}$ não dependerá de $z$ logo $u(\mathbf{x},t) := \widetilde{u}(\mathbf{x},0,t)$ será a solução.

---

Em particular, quando $n=2$,

$$\widetilde{u}(\mathbf{x},z,t) \;=\; \partial_t \left( t \fint_{\partial \widetilde{B}_t(\mathbf{x},z)} \widetilde{\phi}(\mathbf{y},w)\, dS_{\mathbf{y},w} \right) + \left( t \fint_{\partial \widetilde{B}_t(\mathbf{x},z)} \widetilde{\psi}(\mathbf{y},w)\, dS_{\mathbf{y},w} \right). \tag{2.2}$$

Podemos descrever as duas semiesferas em $\mathbb{R}^3$ que compõe $\partial \widetilde{B}_t(\mathbf{x},z)$ por

$$w = z \pm \sqrt{t^2 - |\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2} :\; \mathbf{y} \in B_t(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^2;$$

assim $dS_{\mathbf{y},w} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{1+|\nabla_{\mathbf{y}} w|^2} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{1+\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} = dV_{\mathbf{y}} \sqrt{\frac{t^2}{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}}$. Logo

$$\fint_{\partial \widetilde{B}_t(\mathbf{x},z)} \widetilde{\phi}(\mathbf{y},w)\, dS_{\mathbf{y},w} \;=\; \frac{2}{4\pi t^2} \int_{B_t(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{y}) \sqrt{\frac{t^2}{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} = \tag{2.3}$$

$$= \frac{2}{4\pi t^2} \pi t^2 \fint_{B_t(\mathbf{x})} \phi(\mathbf{y}) \sqrt{\frac{t^2}{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}}, \tag{2.4}$$

e uma fórmula análoga vale para $\psi$.

---

Obtemos a fórmula

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \left[ \partial_t \left( t^2 \fint_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right) + t^2 \fint_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2}} dV_{\mathbf{y}} \right] \tag{2.5}$$

esta é chamada **fórmula de Poisson** (onda n=2)

**Teorema 2.1.** *Se $n = 2$, $\phi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ e $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, então existe uma solução em $\mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)\right)$ de (PVIh-O) e é data pela (2.5).*

Outras formas

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(\mathbf{x})} \frac{t\phi(\mathbf{y}) + t\nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t^2\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2}} \, dV_{\mathbf{y}}; \tag{2.6}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \fint_{B_t(\mathbf{x})} \frac{\phi(\mathbf{y}) + \nabla\phi(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + t\psi(\mathbf{y})}{\sqrt{1 - |\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{t}|^2}} \, dV_{\mathbf{y}}. \tag{2.7}$$

# 3 A solução da equação não homogênea

**Princípio de Duhamel**: a solução de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = F(x,t), \\ u(x,0) = 0, \\ u_t(x,0) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

é

$$u(x,t) = \int_0^t v^s(x,t)ds, \tag{3.2}$$

onde $v^s(x,t)$ é a solução de

$$\begin{cases} (v^s)_{tt} - \Delta_x(v^s) = 0, \\ v^s(x,s) = 0, \\ (v^s)_t(x,s) = F(x,s). \end{cases} \tag{3.3}$$

*Demonstração.* "verificação":

$$u_t = \partial_t \left( \int_0^t v^s(x,t)ds \right) = v^t(x,t) + \int_0^t v^s_t(x,t)ds = 0 + \int_0^t v^s_t(x,t)ds$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \partial_t \left( \int_0^t v^s_t(x,t)ds \right) = v^t_t(x,t) + \int_0^t v^s_{tt}(x,t)ds; \\ &= F(x,t) + \int_0^t \Delta_x v^s(x,t)ds = F(x,t) + \Delta_x u(x,t)ds. \end{aligned}$$

□

Dos Teoremas 1.3-2.1 sabemos que para resolver (3.3) precisa $F \in \mathcal{C}^2$:

**Teorema 3.1.** *Seja $n = 2$ ou 3 e $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, então (3.2) é de classe $\mathcal{C}^2$ e é solução de (3.1).*

Os casos n=1,2,3:

$$n=1: \qquad u(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} F(y,s)dy,$$
$$n=2: \qquad u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t ds\int_{B_{t-s}(x)} \frac{F(y,s)}{\sqrt{(t-s)^2-|y-x|^2}}dV_y$$
$$n=3: \qquad u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^t ds\int_{\partial B_{t-s}(x)} \frac{F(y,s)}{t-s}dS_y=$$

# 4 Comentários

- Como para o caso $n = 1$, mostramos **existência, unicidade** e uma fórmula para a solução da qual podemos verificar a **dependência contínua dos dados**.

- No caso $n = 3$, podemos ver que a solução em $(x,t)$ depende de $\phi, \psi$ e de um certo número de suas derivadas, mas apenas na esfera de centro $x$ e raio $t$, isto é, depende destas funções apenas numa pequena vizinhança desta esfera, e não no interior da bola.

  Este fato é chamado **princípio de Huygens** e não vale nem em dimensão $n = 1$ nem em dimensão $n = 2$.

  Como som e luz satisfazem a equação da onda em dimensão 3, o princípio de Huygens implica no fato que um sinal (de luz ou de som) emitido em $t = 0, x = 0$ é recebido exatamente no instante $t = |x|$ no ponto $x$: isso permite de maneira simples transmitir receber e decodificar sinais sonoros e luminosos. O mesmo não acontece no caso de ondas numa superfície liquida.

## 5 Calor

Consideremos (PVI-C)

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{PVI-C}$$

---

A solução em dimensão 1 era

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x-\xi,t)\phi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \phi(\xi)d\xi \tag{5.1}$$

onde $\psi(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}}$ é a **Solução fundamental** (em dimensão 1):

- solução gerada por uma fonte de calor pontiforme concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $x = 0$
- Para todo $t > 0$, a função $\psi(\cdot, t)$ é uma **gaussiana, de integral unitário, centrada em $x = 0$ e de variância $\sigma^2 = 2t$.**
- em particular $\psi$ satisfaz a equação do calor para $t > 0$ e "tende a $\delta_0$" quando $t \searrow 0$ (tende a 0 exceto na origem)

---

Observemos que se $u_i(\xi,t)$, $i = 1,..n$ são soluções da equação do calor em uma variável $\xi$, então $u(\mathbf{x},t) = \prod_{i=1}^n u_i(x_i,t)$ é solução da equação do calor em $\mathbb{R}^n$.

então

$$\prod_{i=1}^{n} \psi(x_i,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\, e^{-\frac{\sum x_i^2}{4t}}$$

- é solução da equação do calor para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$
- sua integral em $\mathbb{R}^n$ é 1 para todo $t > 0$
- tende a 0 quando $t \to 0$ exceto na origem

Concluímos que

$$\psi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{(4\pi t\,)^{n/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}$$

é a **Solução fundamental** (em dimensão n):

- solução gerada por uma fonte de calor pontiforme concentrada no instante $t = 0$ e no ponto $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$
- Para todo $t > 0$, a função $\psi(\cdot, t)$ é uma **gaussiana em $n$ variáveis, radialsimétrica em x, de integral unitário, centrada em $x = 0$.**

Logo a solução de (PVI-C) em dimensão n é

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{w},t)\phi(\mathbf{w})dV_{\mathbf{w}} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t\,)^{n/2}}\, e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{w}|^2}{4t}}\phi(\mathbf{w})dV_{\mathbf{w}} \qquad (5.2)$$

Analogamente, a solução completa (com fonte) é

$$u(\mathbf{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{w},t)\phi(\mathbf{w})dV_{\mathbf{w}} + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\mathbf{x}-\mathbf{w},t-s)F(\mathbf{w},s)dV_{\mathbf{w}}$$