1 Análise combinatória

1.1 Introdução

Objetivo: Aprender a **contar os elementos** de certos conjuntos (sempre finitos)

Exemplos:

- Dados dois conjuntos finitos A, B, quantos elementos tem $A \cap B$? e $A \times B$?
- Dados N pontos não alinhados no plano, quantos segmentos podemos desenhar usando eles como vértices? Quantos triângulos?
- Dados dois conjuntos finitos A, B, quantas funções $f : A \to B$ existem ? Quantas injetoras? Quantas bijetoras?
- Quantos subconjuntos S com k elementos existem, num conjunto A de n elementos? $(n \geq k)$
- Quantos são os anagramas da palavra GATO? E da palavra TORORO?
- de quantas maneiras podemos dispor k livros idénticos em n estantes? e se os livros são diferentes?
- Quantas vezes um programa passa por uma instrução?

2 Lembrete sobre conjuntos

Um conjunto é uma coleção de objetos (de qualquer tipo)

Podemos descreve-los de várias formas:
$A = \{1, 2, 3, 4\} = \{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 4\}, \ \ B = \{1, A, \circledast\}$, ...
Definições:

- **Cardinalidade de um conjunto C (finito)**:
  $|C| = \#C$ é o número de elementos do conjunto.
- Dizemos que dois conjuntos A, B são **disjuntos** se não tem elementos em comum. $(A \cap B = \emptyset)$
- Dizemos que os conjuntos de uma família $\{A_i\}_{i \in I}$ são **mutuamente disjuntos** se por cada dupla de elementos da família eles são disjuntos
  $(\forall\, i, j \in I : \ i \neq j$ vale $A_i \cap A_j = \emptyset)$.

2.1 Alguns princípios básicos

Teorema (Princípio da adição).
Se $\{A_i\}_{i=1,..,N}$ *é uma família (finita) de conjuntos FINITOS, mutuamente disjuntos, então*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right| = \sum_{i=1}^{N} |A_i|$$

(NOTAÇÃO para reunião disjunta: $\coprod_{i=1}^{N} A_i$ *)*

Dizemos que $\{A_i\}_{i=1}^{N}$ é uma **partição** de um conjunto A se $A = \coprod_{i=1}^{N} A_i$. Cada conjunto A_i é dito **bloco da partição**.

Teorema (Princípio da adição - v2).
Se $\{A_i\}_{i=1}^{N}$ *é uma partição do conjunto FINITO* A*, então*

$$|A| = \sum_{i=1}^{N} |A_i|$$

Teorema (Princípio do produto)**.**
Se $\{A_i\}_{i=1}^N$ *é uma família composta a por N conjuntos FINITOS, todos de cardinalidade M e mutuamente disjuntos então*

$$\left|\bigcup_{i=1}^N A_i\right| = MN$$

Teorema (Princípio do produto - v2)**.**
Se A, B *são dois conjuntos FINITOS, então*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Por indução podemos obter

Teorema (Princípio do produto - v3)**.**
Se $\{A_i\}_{i=1}^N$ *é uma família de N conjuntos FINITOS,então*

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$$

$$\left|\prod_{i=1}^N A_i\right| = \prod_{i=1}^N |A_i|$$

Teorema (Princípio do produto - v4)**.**
Se S_n *é um conjunto di listas* $(a_1, ..., a_n)$ *de* n *elementos com as propriedades:*

- a_1 *pode ser escolhido de* h_1 *maneiras,*
- *para todo* $j : 1 \leq j < n$*, escolhidos os elementos* $a_1, .., a_j$*, o elemento* a_{j+1} *pode ser escolhido de* h_{j+1} *maneiras.*

Então

$$|S_n| = \prod_{j=1}^{n} h_j \, .$$

Teorema (Princípio da bijeção)**.**
Se A, B *são conjuntos FINITOS, então*
$|A| = |B|$ *se e só se existe uma bijeção* $b : A \to B$

3 Relações

- Dados dois conjuntos X, Y, chamamos **Relação de X em Y**: um conjunto $R \subseteq X \times Y$.
- Se $X = Y$ chamamos de **Relação em X**
- quando $(x, y) \in R$ dizemos xRy

Exemplos: duas relações em $\mathbb{Z}$:
– $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \ x \leq y\}$
– $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : \ |x - y| = 1\}$

Definições: Uma Relação R em um conjunto X é dita

- **Reflexiva**, se $\forall x \in X$ vale xRx.
- **Simétrica**, se $xRy \iff yRx$.
- **Antisimétrica**, se $xRy \wedge yRx \implies x = y$.
- **Transitiva**, se $(xRy \wedge yRz) \implies xRz$. ...

3.1 Relações de equivalência

Uma Relação R em X é dita **Relação de equivalência** se ela é **Reflexiva**, **Simétrica** e **Transitiva**

Teorema. *Seja R em X uma Relação de equivalência. Dado $x \in X$, seja*

$$C_x = \{z \in X : \ xRz\} .$$

Então vale

- *dados $x, y \in X$ vale $(C_x = C_y) \ \oplus \ (C_x \cap C_y = \emptyset)$*
- *a família $\{C_x\}_{x \in X}$ é uma partição de X.*

Os conjuntos da partição $\{C_x\}_{x \in X}$ são ditos **classes de equivalência** (C_x é a **classe de equivalência de** x, também indicada por $[\![x]\!]$).

Teorema. *Dada uma partição de um conjunto X ($X = \coprod_{\alpha \in A} C_\alpha$) a Relação definida como*

$$xRy \iff x \text{ e } y \text{ estão no mesmo bloco da partição}$$

é uma Relação de equivalência.

Teorema (Princípio de divisão)**.**
Se uma relação de equivalência divide um conjunto A de N elementos em k classes de equivalência com r elementos em cada, então $k = N/r$

3.2 Relações de ordem

Uma Relação R em X é dita

- **Relação de ordem (parcial)** se ela é
  Reflexiva,**Antisimétrica** e **Transitiva**
- **Relação de ordem total** se ela é Relação de ordem (parcial) com a propriedade que $\forall x, y \in X$ vale $(xRy \ \vee yRx)$

X junto com uma relação de ordem R parcial (ou total) é dito
conjunto parcialmente (ou totalmente) ordenado.

Definição Em um conjunto X ordenado com a relação R, chamamos **elemento mínimo**, um $x \in X$ (se existír) tal que xRy para todo $y \in X$

se X é totalmente ordenado e vale
"todo $S \subseteq X$ com $S \neq \emptyset$ possui um elemento mínimo"dizemos que
X é bem ordenado.

Vejamos mias exemplos:

1. R em $\mathbb{N}$: $xRy \iff x = y \quad$ (identidade);
2. R em $\mathbb{N}$: $xRy \iff |x - y| = 1$;
3. R em $\mathbb{N}$: $xRy \iff x < y$;
4. R em $\mathbb{N}$: $xRy \iff x \leq y$;
5. R em X onde X é uma família de conjuntos: $ARB \iff A \subset B$;
6. R em X onde X é uma família de conjuntos: $ARB \iff A \subseteq B$;
7. R em $\mathcal{P}$ onde $\mathcal{P}$ é o conjunto das permutações de k elementos entre N:
   : $\;pRq \iff$ "p e q envolvem os mesmos k elementos".

4 Algumas definições

4.1 Conjuntos e Multiconjuntos

Definimos

- **conjunto**: uma coleção de objetos.
  OBS: posso pegar cada objeto no máximo uma vez e não importa a ordem.

  A **cardinalidade de um conjunto** (finito) é o número de seus elementos. (notação $|A|$ ou $\#A$).

- **multiconjunto**: uma coleção de objetos onde posso pegar cada objeto mais de uma vez (mas ainda não importa a ordem).

  Dado um multiconjunto M, posso associá-lo a uma dupla (C, m) onde

  - C é um conjunto
  - $m : C \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ é a *função multiplicidade de M*:
    $m(c) =$"o número de vezes que c está em M"

  A **cardinalidade de um multiconjunto** (finito) é o número de seus elementos (contando repetições).

  Com a notação acima pode ser visto como a soma das multiplicidades

$$|M| = \sum_{c \in C} m(c)$$

4.2 Listas, permutações e combinações

Listas de k objetos entre N:

são **sequências (ordenadas!) de k objetos, escolhidos num conjunto de N elementos**.

ex:

lista de 6 elementos em $\{0; 1\}$: 0,1,1,0,1,0
listas de 4 letras: GATO TOGA TOTO ...

Uma lista de k objetos em C pode ser vista como uma **função**

$$f : \{1; 2; ..; k\} \to C$$

Permutações de k objetos entre N:

são as **listas SEM REPETIÇÕES, de k objetos escolhidos em um conjunto de N elementos,**

(correspondem às funções injetoras!)

Permutações de N objetos: o caso $k = N$.

(correspondem às funções bijetoras!)

Combinações simples de k objetos entre N

correspondem aos **subconjuntos de k elementos, de um conjunto de N elementos**:

Combinações com repetição de k objetos entre N

correspondem aos **multiconjuntos de k elementos, escolhidos em um conjunto de N elementos**:

LEMBRAR:

Lista: importa ordem e pode repetir
Permutação: importa ordem e não pode repetir
Combinação simples: não importa ordem e não pode repetir
Combinação com repet.: não importa ordem e pode repetir

5 Algumas fórmulas

$(N, k \in \mathbb{Z})$

- Número de *Listas de k objetos entre N* $(N \geq 1,\ k \geq 0)$:

$$L_k^N := N^k$$

- Número de *Permutações de k objetos entre N* $(0 \leq k \leq N)$:

$$P_k^N := \frac{N!}{(N-k)!} = \prod_{j=N-k+1}^{N} j$$

(o livro usa a notação $N^{\underline{k}}$: "k-ésima potência fatorial decrescente")

- Número de *Permutações de N objetos* $(N \geq 0)$:

$$P^N := P_N^N = N!$$

- Número de *Combinações simples de k objetos entre N* $(0 \leq k \leq N)$:

$$C_k^N := \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!}$$

- Número de *Combinações com repetição de k objetos entre N* $(N \geq 1,\ k \geq 0)$:

$$CR_k^N := \binom{k+N-1}{k}$$

(o livro usa a notação $N^{\overline{k}}$: "k-ésima potência fatorial crescente"para $= \frac{N+k-1!}{(N-1)!} = \prod_{j=N}^{N+k-1} j$)

5.1 Mais fórmulas

- Número de *maneiras de rotular N objetos com N rótulos dos quais k_i rótulos de tipo i* (onde $i = 1, .., r$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = N$)

$$C_{k_1,..,k_r}^N := \binom{N}{k_1, ..., k_r} = \frac{N!}{k_1! \dots k_r!}$$

- Número de *maneiras de ordenar k objetos em N listas* (problema da arrumação da estante)

$$N^{\overline{k}}$$

[0]Lembrete: $0! = 1$

6 Coeficientes binomiais

Os números

$$C_k^N := \binom{N}{k} = \frac{N!}{(N-k)!\,k!}$$

são ditos **Coeficientes binomiais**.

Algumas propriedades:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Binômio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

6.1 Coeficientes multinomiais e rotulagem

Dados $k_1, .., k_r$ tais que $\sum_{i=1}^{r} k_i = N$, os números

$$C^N_{k_1,..,k_r} := \binom{N}{k_1, ..., k_r} = \frac{N!}{k_1! \dots k_r!}$$

são ditos **Coeficientes multinomiais**.

$C^N_{k_1,..,k_r}$ é o número de maneiras de rotular N objetos com N rótulos dos quais k_i rótulos de tipo i (onde $i = 1, .., r$)

Trinômio de Newton

$$(x + y + z)^n = \sum_{(k_x,k_y,k_z)\in C} \binom{n}{k_x, k_y, k_z} x^{k_x} y^{k_y} z^{k_z}$$

onde

$$C = \{(a, b, c) : a, b, c \geq 0 \text{ } e \text{ } a + b + c = n\}$$

Multinômio de Newton

$$\left(\sum_{i=1}^{T} x_i\right)^n = \sum_{(k_1,...,k_T)\in C} \binom{n}{k_1, .., k_T} \left(\prod_{i=1}^{T} x_i^{k_i}\right)$$

onde

$$C = \left\{(k_1, ..., k_T) : k_1, ..., k_T \geq 0 \text{ } e \text{ } \sum_{i=1}^{T} k_i = n\right\}$$

OBS: $|C| = CR^T_n$.