1 Lógica

1.1 Conectivos lógicos (AND OR XOR NOT)

Nome:	AND	OR	XOR	NOT
em port:	e	ou	ou exclus.	não
Símbolo	$\wedge$	$\vee$	$\oplus$	$\neg$" " (ou $\overline{\text{" "}}$)
em C	&&	||		!
	binário			unário

Af1 AND Af2:

$Af1 \wedge Af2$		
Af1 \ Af2	V	F
V	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Af1 OR Af2:

$Af1 \vee Af2$		
Af1 \ Af2	V	F
V	**V**	**V**
F	**V**	**F**

Af1 XOR Af2:

$Af1 \oplus Af2$		
Af1 \ Af2	V	F
V	**F**	**V**
F	**V**	**F**

NOT Af1 :

$\overline{Af1}$	
Af1	
V	**F**
F	**V**

Propriedades
(aqui ”=”significa ”é equivalente a”)

Leis distributivas AND/OR:
$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Leis de De Morgan
$\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$
$\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

Expressão para XOR:
$a \oplus b = (a \vee b) \wedge \overline{a \wedge b} = (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$

Dupla negação:
$\overline{\overline{a}} = a$

1.2 Implicações ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$)

Af1 implica Af2:

Af1 $\Longrightarrow$ Af2		
Af2 \ Af1	V	F
V	**V**	**V**
F	**F**	**V**

Af1 se e só se Af2:

Af1 $\Longleftrightarrow$ Af2		
Af2 \ Af1	V	F
V	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Propriedades

$(a \Longrightarrow b) = \overline{a} \vee b$

$(a \Longrightarrow b) = (\overline{b} \Longrightarrow \overline{a})$ (**Af. contranominal/contrapositiva**)

$(a \Longleftrightarrow b) = (\overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a})$

CUIDADO: $(a \Longrightarrow b)$ não é o mesmo que $(b \Longrightarrow a)$ (**Af. reciproca**)

Observação: Podemos usar "$\Longleftrightarrow$"no lugar do "$=$":
ex: $(\overline{a \wedge b}) \Longleftrightarrow (\overline{a} \vee \overline{b})$

1.3 Quantificadores: ($\forall$, $\exists$)

- **quantificador universal:** $\forall$ (para todo)
  a afirmação "$\forall\, x$ vale Af(x)" é :

VERDADEIRA se Af(x) vale para todo x
FALSA se Af(x) é falsa para pelo menos um x (existe um x tal que Af(x) é falsa)

- **quantificador existencial:** $\exists$ (existe)
  a afirmação "$\exists\, x$ tal que vale Af(x)" é :

VERDADEIRA se Af(x) vale para pelo menos um x
FALSA se Af(x) é falsa para todo x

Negação de afirmações com quantificadores

$$\overline{\forall\, x \in X \text{ vale } p(x)} \Longleftrightarrow \exists\, x \in X :\ \overline{p(x)}$$

$$\overline{\exists\, x \in X :\ p(x)} \Longleftrightarrow \forall\, x \in X \text{ vale } \overline{p(x)}$$

Negando afirmações com mais quantificadores:

$$\overline{\forall\, x\ \exists\, y :\ p(x,y)} \Longleftrightarrow \Big(\exists\, x :\ \forall\, y \text{ vale } \overline{p(x,y)}\Big)$$

$$\overline{\exists\, x :\ \forall\, y \text{ vale } p(x,y)} \Longleftrightarrow \Big(\forall\, x\ \exists\, y :\ \overline{p(x,y)}\Big)$$

....

2 Regras de inferência

Regras para provas diretas

1) Dado um exemplo de $x \in U$: $p(x)$ é falso, concluímos $\overline{\forall x \in U \textbf{ vale } p(x)}$.
2) Dado um exemplo de $x \in U$: $p(x)$ é verdadeiro, concluímos $\exists x \in U : \ p(x)$.
3) se a e b, concluímos $a \wedge b$.
4) se a ou b, concluímos $a \vee b$.
5) se $\overline{a}$ ou b, concluímos $a \Longrightarrow b$.
6) se $a \Longrightarrow b$ e $b \Longrightarrow a$, concluímos $a \Longleftrightarrow b$.
7) se a e $a \Longrightarrow b$, concluímos b. *(inferência direta)*
8) se $a \Longrightarrow b$ e $b \Longrightarrow c$, concluímos $a \Longrightarrow c$. *(transitividade)*
9) se o fato que vale a permite mostrar que vale b, concluímos $a \Longrightarrow b$. *(princípio da prova condicional)*
10) se dado x, o fato que $x \in U$ permite mostrar que vale q(x), concluímos $\forall x \in U \textbf{ vale } q(x)$. *(princípio da generalização universal)*

Regras para provas indiretas

provas contrapositivas:

11) se $\overline{b} \Longrightarrow \overline{a}$, concluímos $a \Longrightarrow b$.

provas por contradição:

12) se supondo a e $\overline{b}$ podemos obter c e $\overline{c}$, concluímos $a \Longrightarrow b$. *(redução ao absurdo)*
    (mais em geral, se supondo a podemos obter c e $\overline{c}$, concluímos $\overline{a}$).

3 Indução

Princípio de Indução (fraca)
Seja $U \subseteq \mathbb{N}$ com as propriedades:

- $1 \in U$,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $k \in U$ então $k + 1 \in U$".

Então $U = \mathbb{N}$.

Princípio de Indução (fraca) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k + 1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Princípio de Indução (forte) (para afirmações)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(1)$ é verdade,
- $\forall\, k \in \mathbb{N}$ vale "se $p(1)...p(k)$ são verdade então $p(k + 1)$ é verdade".

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Variantes (outro ponto inicial)
Seja $p(n)$ uma afirmação sobre $n \in \mathbb{N}$ tal que

- $p(n_0)$ é verdade,
- $\forall\, k \geq n_0$ vale "se $p(k)$ é verdade então $p(k + 1)$ é verdade".
  (ou "se $p(n_0)...p(k)$ são verdade então $p(k + 1)$ é verdade".).

Então $p(n)$ é verdade $\forall\, n \geq n_0$.

Etapas de uma prova por indução (fraca):

- Provar o **caso base** p(1).
- Provar o **passo de indução**:
  - assumir a **Hipótese de indução** $p(k)$;
  - provar $p(k+1)$ usando apenas $p(k)$ (e regras de inferência).
- Concluir pelo princípio de indução.

4 Indução estrutural

A **indução estrutural** é usada para mostrar afirmações sobre objetos definidos recursivamente.

A ideia da indução estrutural é **reformular a afirmação que queremos mostrar, de forma que dependa de un $n \in \mathbb{N}$, e depois prová-la por indução.**

Exemplos:

- Seja A um conjunto de listas de zero e uns definido assim:

  R1) "010" $\in A$ e "1" $\in A$

  R2) se $x \in A$ então "00x", "11x" $\in A$

  Queremos mostrar que "todo elemento de A possui zeros em número par e uns em número ímpar"

Indução estrutural consiste em mostrar por indução que a afirmação

$p(n)$="todo elemento de A gerado aplicando n vezes a regra R2 possui zeros em número par e uns em número ímpar"

vale para todo $n = 0, 1, 2, ...$