1 Comportamentos assintóticos a $+\infty$

Definições:

Sejam $f, g : D \to \mathbb{R}$ com $D \subseteq \mathbb{R}$ não limitado para cima (consideremos $f \geq 0$ e $g > 0$ para x grande).

- Diremos

  "$\mathbf{f(x) = O(g(x))}$ quando $x \to \infty$"

  (f é "O grande" de g quando x tende a ∞),

  (f é de ordem menor ou igual a g quando x tende a ∞),

  $$se \qquad \boxed{\exists\, C, H > 0 : \ f(x) \leq C g(x) \qquad \forall x > H}$$

- Diremos

  "$\mathbf{f(x) = \Theta(g(x))}$ quando $x \to \infty$"

  (f é theta de g quando x tende a ∞),

  "$\mathbf{f(x) \asymp g(x)}$ quando $x \to \infty$"

  (f é da mesma ordem de g quando x tende a ∞),

  $$se \qquad \boxed{\exists\, c, C, H > 0 : \ c g(x) \leq f(x) \leq C g(x) \qquad \forall x > H}$$

- Diremos

  "$\mathbf{f(x) \sim g(x)}$ quando $x \to \infty$"

  (f é assintótico a g quando x tende a ∞),

  $$se \qquad \boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\,.}$$

Exemplos: (quando $x \to \infty$)

$$x = O(x^2), \qquad \sin(x) = O(x), \qquad x \ln x = O(x^2), \qquad x = O(x \ln x)$$

$$\frac{x}{\ln x} = O(x), \qquad \frac{1}{x} = O(1), \qquad |\sin(x)| = O(1), \qquad 3 + \sin(x) = \Theta(1)$$

$$Ax + B = O(x), \qquad Ax + B = \Theta(x) \qquad para\ A > 0,\ B \in \mathbb{R}$$

$$x + B \sim x \quad (para\ B \in \mathbb{R}), \qquad \sin(1/x) \sim 1/x$$

2 Algo sobre complexos

Um **número complexo** pode ser associado a uma dupla de reais, usaremos a seguinte notação:

$$z \in \mathbb{C} : \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Definimos:

$$\textbf{soma}: \qquad (x+iy) +_{\mathbb{C}} (X+iY) := (x+X) + i(y+Y)$$

$$\textbf{produto}: \qquad (x+iy) \cdot_{\mathbb{C}} (X+iY) := (xX - yY) + i(Xy + xY)$$

Desta forma o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é um **corpo**.

Podemos identificar os complexos $x + i0$ com os reais.
Os complexos $\pm i$ são raízes do real -1.
Chamamos de **conjudado** de $z = x + iy$, o complexo $\overline{z} = x - iy$.

Frequentemente é útil representar um complexo na forma polar:

$$z = x + iy = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

onde $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\theta = arg(z) = (2k\pi +) \begin{cases} arctg(y/x) & para\ x > 0 \\ arctg(y/x) + \pi & para\ x < 0 \\ \pi/2 & para\ x = 0,\ y > 0 \\ 3\pi/2 & para\ x = 0,\ y < 0 \\ q.q. & para\ x = 0,\ y = 0 \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Produto na forma polar:

$$[\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))] \cdot [\sigma(\cos(\phi) + i\sin(\phi))] = [\rho\sigma(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))]$$

Potência na forma polar

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

3 Algo sobre polinômios

Um **polinômio a coeficientes reais de grau r** pode ser escrito como

$$\mathcal{P}(x) = c_r x^r + c_{r-1} x^{r-1} + ... + c_1 x + c_0$$

onde $c_r, .., c_0 \in \mathbb{R}$.

- q é dita **raiz** do polinômio $\mathcal{P}$ se $\mathcal{P}(q) = 0$.

- Um polinômio a coeficientes reais de grau r pode possuir até r raízes reais (isto é, $q \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{P}(q) = 0$).

  Um polinômio a coeficientes reais (ou complexos) de grau r possui sempre exatamente r raízes complexas (isto é, $q \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{P}(q) = 0$), **contadas com sua multiplicidade.** (Teorema fundamental da Álgebra).

  Isto significa que $\mathcal{P}$ pode sempre ser fatorado em r fatores simples na forma $\mathcal{P}(x) = c_r(x - q_1)(x - q_1).....(x - q_r)$, onde $q_1, .., q_r \in \mathbb{C}$ são as raízes. A **multiplicidade** de uma raiz q é o número de vezes que o fator $(x - q)$ aparece na fatoração.

- **Se o polinômio $\mathcal{P}$ é a coeficientes reais** então **as raízes não reais aparecem sempre em duplas de raízes complexas conjugadas**, na forma

$$q = a + ib, \quad \overline{q} = a - ib : \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Exemplos:
$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$: 2 raízes simples reais: 1 e -1
$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$: 2 raízes simples complexas conjugadas? i e $-i$
$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$: uma raiz real: -1, de multiplicidade 2.

4 Recorrências

Uma **equação de recorrência de ordem r** é uma relação que determina cada termo a_n de uma sequência, em função de n e dos r termos anteriores:

$$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-r}) \, .$$

Resolver uma equação de recorrência, significa encontrar uma fórmula explicita para a sequência.

Para resolver uma equação de recorrência, precisamos sempre de r **condições iniciais**.

O **Método de iteração** consiste em calcular sequencialmente os termos de a_n a partir das condições iniciais e deduzir deles uma fórmula explicita, que depois deverá ser provada por indução.

4.1 Recorrências lineares

Uma recorrência é

- **linear** quando f é linear nos termos da sequência:
$$a_n = C_1(n)a_{n-1} + C_2(n)a_{n-2} + ... + C_r(n)a_{n-r} + g(n) \qquad \text{(L)}$$
- é **linear e homogênea** quando $g(n) = 0$:
$$a_n = C_1(n)a_{n-1} + C_2(n)a_{n-2} + ... + C_r(n)a_{n-r} \qquad \text{(LH)}$$
- é **linear a coeficientes constantes** quando os coeficientes $C_1, ..., C_r$ não dependem de n
$$a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + ... + C_ra_{n-r} + g(n) \qquad \text{(LCC)}$$
- é **linear a coeficientes constantes e homogênea**: quando
$$a_n = C_1a_{n-1} + C_2a_{n-2} + ... + C_ra_{n-r} \qquad \text{(LCCH)}$$

Princípio de sobreposição:

- Se a_n e b_n satisfazem a recorrência (LH) então
$Aa_n + Bb_n$ também satisfaz $\forall A, B \in \mathbb{R}$;
- se a_n satisfaz a recorrência (LH) e p_n satisfaz a recorrência (L) então
$a_n + p_n$ também satisfaz (L);
- Se p_n satisfaz a recorrência (L) com $g = g_1$ e q_n satisfaz a recorrência (L) com $g = g_2$, então
$p_n + q_n$ satisfaz a recorrência (L) com $g = g_1 + g_2$.
- Se p_n satisfaz a recorrência (L) com g, então
Dp_n satisfaz a recorrência (L) com Dg no lugar de g, $\forall D \in \mathbb{R}$.
- O mesmo vale com (LCC) e (LCCH).

4.2 Solução de recorrências lineares a coeficientes constantes

4.2.1 homogêneas a coeficientes constantes

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \dots + C_r a_{n-r} \tag{LCCH}$$

Considere a **equação característica** associada à recorrêcia (LCCH):

$$\lambda^{\mathbf{r}} = \mathbf{C_1}\lambda^{\mathbf{r-1}} + \mathbf{C_2}\lambda^{\mathbf{r-2}} + \dots + \mathbf{C_r}\lambda^{\mathbf{0}} \tag{EC}$$

- se λ é uma raiz real de (EC) então

  $$\lambda^n \qquad \text{é solução de (LCCH)}$$

- se λ é uma raiz real de (EC), de multiplicidade k, então

  $$\lambda^n,\ n\lambda^n, \dots,\ n^{k-1}\lambda^n \qquad \text{são soluções de (LCCH),}$$

- se $\lambda, \overline{\lambda}$ são duas raízes complexas conjugadas de (EC) então

  $$\rho^n \cos(n\theta),\quad \rho^n \sin(n\theta) \qquad \text{são soluções de (LCCH),}$$

  onde $\rho = |\lambda|,\ \theta = arg(\lambda)$.

- se $\lambda, \overline{\lambda}$ são duas raízes de (EC) complexas conjugadas e de multiplicidade k então

  $$\rho^n \cos(n\theta),\quad \rho^n \sin(n\theta), \dots,\ n^{k-1}\rho^n \cos(n\theta),\quad n^{k-1}\rho^n \sin(n\theta)$$

  são soluções de (LCCH), onde $\rho = |\lambda|,\ \theta = arg(\lambda)$.

Qualquer solução de (LCCH) pode ser escrita como combinação linear das r soluções obtidas.

O Polinômio

$$\lambda^{\mathbf{r}} - \mathbf{C_1}\lambda^{\mathbf{r-1}} - \mathbf{C_2}\lambda^{\mathbf{r-2}} - \dots - \mathbf{C_r}\lambda^{\mathbf{0}} \tag{PC}$$

é dito **Polinômio característico** da recorrêcia (LCCH).

4.2.2 Não homogêneas a coeficientes constantes

$$a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + ... + C_r a_{n-r} + g(n) \qquad \text{(LCC)}$$

Método de semelhança: uma técnica para encontrar soluções para a não homogênea é procurando uma solução de forma parecida à $g(n)$.

Casos importantes:

- **g polinômio de grau s**:
  procure uma solução em forma de polinômio:
  - do grau s se 1 não é raiz da (EC) da (LCCH),
  - de grau $s+k$ se 1 é raiz de multiplicidade k da (EC) da (LCCH),
- **potência $\mathbf{g(n) = b^n}$**:
  procure uma solução na forma
  - Ab^n se b não é raiz da (EC) da (LCCH),
  - $An^k b^n$ se b é raiz de multiplicidade k da (EC) da (LCCH).

Qualquer solução de (LCC) pode ser escrita como combinação linear das r soluções de (LCCH) mais a solução de (LCC) encontrada.

4.3 Lineares de primeira ordem

Considere (LH):

$$a_n = C_n a_{n-1}$$

por iteração obtemos

$$a_n = \left[\prod_{i=1}^{n} C_i\right] a_0 \qquad \text{para } n > 0$$

Considere (L):

$$a_n = C_n a_{n-1} + f_n$$

por iteração obtemos

$$a_n = \left[\prod_{i=1}^{n} C_i\right] a_0 + \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\prod_{i=j+1}^{n} C_i\right) f_j\right]$$

$$a_n = \left[\prod_{i=1}^{n} C_i\right] a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \left[\left(\prod_{i=j+1}^{n} C_i\right) f_j\right] + f_n$$

4.4 Um caso util:

Considere a recorrência

$$\boxed{a_k = \alpha\, a_{k-1} + \beta^k}$$

- a sol. geral da homogênea é
  - $a_k = D\alpha^k, \qquad D \in \mathbb{R};$
- uma sol. da eq completa é
  - $a_k = \frac{\beta}{\beta-\alpha}\,\beta^k \qquad$ se $\alpha \neq \beta$
  - $a_k = k\beta^k \qquad$ se $\alpha = \beta$
- a sol. geral é
  - $a_k = D\alpha^k + \frac{\beta}{\beta-\alpha}\,\beta^k\ , \quad D \in \mathbb{R} \qquad$ se $\alpha \neq \beta$
  - $a_k = D\alpha^k + k\alpha^k\ , \quad D \in \mathbb{R} \qquad$ se $\alpha = \beta$
- a ordem da sol. geral é

  - $a_k = \Theta(\alpha^k)\ , \quad$ se $\alpha > \beta \qquad$ (se $D \neq 0$)
  - $a_k = \Theta(\beta^k)\ , \quad$ se $\alpha < \beta$
  - $a_k = \Theta(k\alpha^k)\ , \quad$ se $\alpha = \beta$

5 Recorrências que aparecem na analise de programas "divide e conquista"

Considere o problema

$$\begin{cases} T(n) = aT(n/b) + f(n) & se\ n > 1 \\ T(1) = t_1 \end{cases} \tag{DC}$$

onde n assume apenas valores que são potências inteiras de b.

Interpretação computacional:

- **Para resolver um problema de tamanho n precisamos resolver a problemas de tamanho n/b mais um trabalho adicional $f(n)$.**
- **Para resolver um problema de tamanho 1 precisamos um trabalho t_1.**

5.1 Método de solução usando recorrências de ordem 1

- No problema (DC) faça a mudança de variável-recorrência

$$n = b^k \iff \log_b n = k, \qquad A_k := T(b^k)$$

- Assim obtém-se

$$\begin{cases} A_k = a\, A_{k-1} + f(b^k) \\ A_0 = t_1 \end{cases} \tag{R1}$$

5.2 Método de solução usando árvore de recursão

nível	1	2	3	..	k	k+1
# de prob.	1	a	a^2	..	a^{k-1}	a^k
tam. de cada prob.	n	$\frac{n}{b}$	$\frac{n}{b^2}$	..	$\frac{n}{b^{k-1}}$	1
trab. por prob.	$f(n)$	$f\left(\frac{n}{b}\right)$	$f\left(\frac{n}{b^2}\right)$	..	$f\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right)$	t_1
Trab total	$f(n)$	$af\left(\frac{n}{b}\right)$	$a^2 f\left(\frac{n}{b^2}\right)$	..	$a^{k-1} f\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right)$	$a^k t_1$

Somando

$$\left[\sum_{i=0}^{k-1} a^i f\left(\frac{n}{b^i}\right)\right] + a^k t_1$$

6 Teorema Mestre

$f(n) = n^c$

Solução para A_k:

$$\boxed{A_k = \begin{cases} \left(t_1 - \frac{b^c}{b^c-a}\right) a^k + \frac{b^c}{b^c-a}\,(b^c)^k & \textit{se } a \neq b^c, \\ t_1\, a^k + k(b^c)^k & \textit{se } a = (b^c)\,. \end{cases}} \tag{6.1}$$

$$\boxed{A_k = \begin{cases} \Theta(a^k) & \textit{se } a > (b^c), \\ \Theta((b^c)^k) & \textit{se } a < (b^c), \\ \Theta(ka^k) & \textit{se } a = (b^c). \end{cases}} \tag{6.2}$$

Solução pela árvore:

$$T(n) = \begin{cases} n^c\left(1 - (a/b^c)^k\right) \frac{b^c}{b^c-a} + a^k t_1\,, & \textit{se } a \neq b^c, \\ kn^c + a^k t_1 & \textit{se } a = b^c,. \end{cases}$$

Teorema 6.1 (Teorema Mestre V1)**.**
Considere

$$\begin{cases} T(n) = aT(n/b) + n^c & \textit{se } n > 1 \\ T(1) = t_1 \end{cases} \tag{DC}$$

onde $a, c > 0$, $b > 1$ *e* $t_1 \geq 0$ *e* n *é potência inteira de* b.
Então a ordem da sol. de (DC) é

- $T(n) = \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$, *se* $a > b^c$
- $T(n) = \Theta(b^{c \log_b n}) = \Theta(n^c)$, *se* $a < b^c$
- $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_b n) = \Theta(n^c \log n)$, *se* $a = b^c$

NOTA: algumas contas:
$a^{\log_b n} = b^{\log_b a \log_b n} = n^{\log_b a}$
$n^c \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = n^{c+\log_b a - \log_b(b^c)} = n^{\log_b a}$
$\log_b n = \Theta(\ln n)$ para $b > 1$

Teorema 6.2. *Considere as recorrências*

$$a_n = C_1(n)a_{n-1} + ... + C_r(n)a_{n-r} + g(n)$$

$$b_n = D_1(n)b_{n-1} + ... + D_r(n)b_{n-r} + h(n)$$

Se

- $0 \leq D_i(n) \leq C_i(n)$ *para* $i = 1, ..., r$ *e* $n \geq n_0$
- $0 \leq h(n) \leq g(n)$ *para todo* $n \geq n_0$
- $0 \leq b_{n_0-i} \leq a_{n_0-i}$ *para* $i = 1, ..., r$

então $0 \leq b_n \leq a_n$ *para todo* $n \geq n_0$

Corolário 6.3. *Considere a recorrência*

$$a_n = C_1(n)a_{n-1} + ... + C_r(n)a_{n-r} + g(n)$$

onde

- $C_i(n) \geq 0$ *para* $i = 1, ..., r$ *e* $n \geq n_0$
- $g(n) \geq 0$ *para* $n \geq n_0$
- $a_{n_0-i} \geq 0$ *para* $i = 1, ..., r$

Suponha que a sequência b_n *satisfaz*

$$b_n \leq C_1(n)b_{n-1} + ... + C_r(n)b_{n-r} + g(n)$$

$$b_{n_0-i} \leq a_{n_0-i} \quad \text{para } i = 1, ..., r$$

então $b_n \leq a_n$ *para* $n \geq n_0$

Teorema 6.4 (Teorema Mestre V2)**.**
O Teorema Mestre vale também se n^c é substituído por $f(n)$ satisfazendo

$$f(n) = \Theta(n^c)$$

Se

$$f(n) = O(n^c)$$

então o teorema vale substituindo Θ por O.

Teorema 6.5 (Teorema Mestre para inequações)**.**
Considere uma sequência tal que

$$\begin{cases} T(n) \leq aT(n/b) + n^c & \textit{se } n > 1 \\ T(1) \leq t_1 \end{cases} \tag{DC}$$

onde $a, c > 0$, $b > 1$ e $t_1 \geq 0$ e n é potência inteira de b.
Então

- $T(n) = O(n^{\log_b a})$, *se* $a > b^c$
- $T(n) = O(n^c)$, *se* $a < b^c$
- $T(n) = O(n^c \log n)$, *se* $a = b^c$

Teorema 6.6 (Teorema Mestre V3)**.**
O Teorema Mestre vale também se a recorrência é substituida por

$$T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + f(n)$$

$$(ou \quad aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n) \leq T(n) \leq aT(\lceil n/b \rceil) + f(n) \quad)$$

onde $b \geq 2$ *e* n *não precisa ser potência inteira de* b*.*