A1 Esp. topológicos, métricos, normados

Espaço topológico: dupla (E, τ): E conjunto, τ **topologia**: uma família de subconjuntos de E "abertos", tal que.

- $E, \emptyset \in \tau$
- se $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$ então $\bigcup A_i \in \tau$ (reuniões quaisquer)
- se $\{A_i\}_{i=1,..,n} \subseteq \tau$ então $\bigcap A_i \in \tau$ (interseções finitas)

Espaço métrico: dupla (E, d): E conjunto, d **métrica**:
$d : E \times E \to [0, \infty)$ tal que

- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\ x, y \in E$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall\ x, y, z \in E$.

Podemos tomar em E a *topologia induzida* pela métrica: a gerada pelas bolas abertas $B_\delta(x) = \{y \in E :\ d(x, y) < \delta\}$, onde $A \subseteq E$ é aberto se para todo $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subset A$.

Espaço vetorial normado: dupla $(E, \|\ \|)$: E espaço vetorial [1],
$\|\ \|$ **norma**: uma função $\|\cdot\| : E \to [0, \infty)$ tal que

- $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in E$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\, x, y \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in E.$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

é dita norma e então $(E, \|.\|)$
Podemos tomar em E a *métrica induzida* pela norma $d(x, y) := \|x - y\|$, e a correspondente topologia.

Entre espaços topológicos podemos definir **continuidade** (de uma função), logo a mesma definição vale em e.m. e em e.v.n.

[1] Conjunto E com uma soma interna (comutativa, associativa, com neutro e inverso) e um produto externo com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ (associativo, distributivo e com identidade):

- $x + y = y + x, \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in E$
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad \forall\, x, y \in E, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$
- $1x = x, \quad \forall\, x \in E.$

A1.1 Algumas definições e propriedades em esp. top./mét.[Fol99, p.13]

Num espaço topológico (E, τ) definimos

- $H \subset E$ é **fechado** se H^c é aberto.
- A união de todos os abertos contidos em G é chamada **interior de** G e é denotado por $\boxed{G'}$.
- A interseção de todos os fechados contendo G é o **fecho de** G e é denotado por $\boxed{\overline{G}}$.
- $G \subset E$ é denso em E se $\overline{G} = E$ e nunca-denso em E se $\overline{G}' = \emptyset$.
- E é separável se tem um subconjunto enumerável e denso.
- $C \subseteq E$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

  > se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

Exercícios

Mostre as propriedades a seguir.

1. $(\overline{G})^c = (G^c)'$ e $\overline{G^c} = (G')^c$.
2. Se G é aberto e denso então G^c é nunca-denso.
   Se G é fechado e nunca-denso então G^c é denso.

Num espaço métrico (E, d) temos:

- **bola aberta** $B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) < r\}$.
- **bola fechada** $\overline{B_r(x)} = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}$.
- **esfera** $S_r(x) = \partial B_r(x) = \{y \in E : d(x, y) = r\}$.
- $G \subseteq E$ é **aberto** se para todo $x \in G$ existe $r_x > 0$ tal que $B_{r_x}(x) \subseteq G$.
- uma sequência $\{x_n\} \subset E$ é **convergente** com limite $x \in E$ se $d(x_n, x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. (Escrevemos $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = x$) .
- $C \subseteq E$ é **compacto** se e só se toda sequência em C tem uma subsequência convergente a um ponto de C.

Exercícios

Num espaço métrico (E, d), mostre as propriedades a seguir.

1. G é fechado se e só se para toda sequência $\{x_n\} \subseteq G$ que converge a algum $x \in E$, vale $x \in G$.
2. $x \in G'$ se e só se existe $B_r(x) \subseteq G$.
3. São equivalentes:
   – $x \in \overline{G}$,
   – $B_r(x) \cap G \neq \emptyset$, $\forall r > 0$,
   – existe uma sequência $(x_n) \subseteq G$: $x_n \to x$.

A2 Completeza

Definição A2.1. Um esp. métrico (E, d) é **completo** se toda sequência $\{x_n\} \subseteq E$ de Cauchy converge a um ponto $x \in E$.

★

> Uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço métrico (E, d) é dita **de Cauchy** se $d(x_n, x_m) \to 0$ quando $\min\{n, m\} \to \infty$:
>
> $$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \ n, m > N \implies d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Exercícios

Exercício. Seja (E, d) um espaço métrico e $\{x_n\} \subset E$ uma sequência.
– se $\{x_n\}$ é convergente então é de Cauchy.
– se $\{x_n\}$ é de Cauchy e alguma sub-sequência dela é convergente, então a sequência inteira é convergente. ★

Exercício.

- Um subconjunto fechado de um espaço métrico completo é completo.
- Um subconjunto completo de um espaço métrico qualquer é fechado.
- Em um esp. métrico, compacto $\implies$ completo $\implies$ fechado. ★

Exercício. Considere $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ e as métricas

$$d_I(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \qquad d_U(f, g) = \max_{x \in [0,1]} \{|f(x) - g(x)|\} .$$

Mostre que (E, d_I) não é completo e que (E, d_U) é completo. ★

A3 Contrações [Che01, p.176] [Car, p.17]

Teorema A3.1. *Seja (E, d) um espaço métrico completo e $f : E \to E$ uma contração. Então existe e é único um ponto fixo de f.* $\triangleleft$

> – f é **contração** se $\exists\, L < 1$: $d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)\ \forall\ x, y \in E$ (em particular, F é Lipschitz contínua de constante L).
> – $x \in E$ é **ponto fixo** de f se $f(x) = x$

Observação A3.2. Podemos relaxar a hipótese pedindo apenas que alguma iterada f^n de f seja uma contração. ★

APLICAÇOES

É usada para provar o Teorema de existência e unicidade para Prob. de Cauchy em EDOs (Picard-Lindelöf)

Exercícios

Exercício. Mostre que se $f : \overline{B_r(p)} \to E$ é uma contração de constante $L < 1$, e além disso $d(p, f(p)) < (1 - L)r$ então f possui um único ponto fixo em $\overline{B_r(p)}$. ★

Exercício (EA1). Sejam $K : [0, 1] \times [0, 1] \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ e $g : [0, 1] \to \mathbb{K}$ funções contínuas dadas. Além disso, seja $K(s, t, w)$ Lipshitz contínua em w, uniformemente com respeito a s, t, ou seja, existe $L > 0 : |K(s, t, w) - K(s, t, v)| \leq L|w - v|, \forall s, t \in [0, 1]$. Encontre hipóteses sobre o parâmetro $\lambda \in \mathbb{K}$ para obter existência e unicidade da solução da equação integral.

$$f(t) - \lambda \int_0^1 K(s, t, f(s))ds = g(t), \quad t \in [0, 1].$$

★

A4 Baire

Seja (E, d) um espaço métrico,

Definição. Um conjunto $A \subset E$ é dito
de primeira Categoria em E (**magro em** E) se A é união enumerável de conjuntos nunca-densos,
de segunda Categoria em E (**não-magro em** E) em caso contrário. ★

- $A \subset X$ é denso em X se $\overline{A} = X$ e nunca-denso em X se $\overline{A}' = \emptyset$.

Teorema A4.1 [das categorias de Baire]. *Todo espaço métrico completo é de segunda categoria nele mesmo.* [Car, prova:p.36] ◁

Proposição A4.2. *(E, d) é de segunda categoria nele mesmo é equivalente a*

- *em qualquer representação de E como união enumerável de conjuntos fechados, pelo menos um deles contém uma bola.*
- *toda interseção enumerável de abertos densos em E é não vazia*

Se (E, d) é esp. métrico completo, também vale que toda interseção enumerável de abertos densos em E é densa em E. ◁

A5 Esp. vet. normados, esp. de Banach

Sempre consideraremos esp. vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definição. Um espaço vetorial normado que é completo com a métrica induzida pela norma é dito um **espaço de Banach**. ★

Teorema A5.1. *Todo espaço vetorial normado pode ser imerso (densamente) em um espaço de Banach (o seu completamento). O completamento é único a menos de isometrias.* [Car, prova:p.19..] [Muj, prova:p.23..] ◁

> **isometria**: $T : E \to F$: linear tal que $\|Tx\|_F = \|x\|_E\,, \quad \forall x \in E$

Duas normas em E, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são **normas equivalentes** se existem $c, C > 0$ tais que

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \quad \forall \;\; x \in E.$$

Elas induzem a mesma topologia.

Teorema A5.2. *Um espaço vetorial normado é completo $\Leftrightarrow$ toda série absolutamente convergente é convergente.* ◁

> Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita **convergente** em E se $\sum_{n=1}^{N} x_n \to x$ quando $N \to \infty$ e **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente.

Em vista da estrutura de e.v.n. podemos definir

- $C \subset E$ é um conjunto **convexo**: se

$$tx + (1-t)y \in C \qquad \text{para todo } x, y \in C \text{ e } t \in [0,1]$$

- $S \subset E$ é um **subespaço**: se

$$0 \in S, \quad x, y \in S \Longrightarrow x + y \in S, \quad x \in S \Longrightarrow \lambda x \in S \;\; \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Exercícios

Exercício. Mostre que bolas abertas e fechadas e subespaços são conjuntos convexos. ★

Exercício. Mostre que

- Se S é um subespaço próprio de um e.v.n. E, então $S' = \emptyset$
- Se S é um subespaço fechado de um espaço de Banach então S é um espaço de Banach.

★

Definição. Uma **base de Hamel** para um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{K}$, é um conjunto $B \subseteq E$ cujos elementos são linearmente independentes e tal que todo elemento de E é combinação linear (finita) de elementos de B:

podemos escrever $B = \{x_i,\ i \in \mathcal{I}\}$: então cada $x \in E$ pode ser escrito (de modo único!), na forma

$$x = \sum_{i \in \mathcal{J}_x} a_i x_i \qquad \textit{com}\ \{a_i\}_{i \in \mathcal{J}_x} \subseteq \mathbb{K}$$

onde $\mathcal{J}_x$ é um subconjunto **finito** de $\mathcal{I}$.

★

Teorema A5.3. *Todo e.v. possui uma base de Hamel*[Fri70, prova:p.131..] ◁

Lema de Zorn *Se X é um conjunto parcialmente ordenado e todo subconjunto totalmente ordenado de X tem um limitante superior então X tem um elemento maximal.*

Conjunto parcialmente ordenado: com uma relação de ordem "$\preceq$"(reflexiva antisimétrica e transitiva) (reflexiva $x \preceq x$
antisimétrica $x \preceq y$ e $y \preceq x \Longrightarrow x = y$
transitiva $x \preceq y$ e $y \preceq z \Longrightarrow x \preceq z$)
Conjunto totalmente ordenado: com uma relação de ordem "$\preceq$" tal que dados x, y quaisquer $x \preceq y$ ou $y \preceq x$
Limitante superior de $Y \subseteq X$: $l \in X$ t.q. $y \preceq l$ para todo $y \in Y$.
$m \in X$ é **elemento maximal** de X: $x \in X$ e $m \preceq x \Longrightarrow m = x$.

São afirmações equivalentes (Princípios da teoria dos conjuntos)
Lema de Zorn,
Princípio da Boa Ordenação,
Princípio Maximal de Hausdorff,

Axioma da Escolha

Fixada uma base de Hamel, podemos definir $|||\cdot|||_\infty : E \to \mathbb{R}$ por

$$|||x|||_\infty = \max_{i\in\mathcal{J}_x} |a_i| \qquad \text{quando } x = \textstyle\sum_{i\in\mathcal{J}_x} a_i x_i.$$

Corolário A5.4. *Todo e.v. pode ser normado* ◁

Definição. E tem **dimensão** $n \in \mathbb{N}$ se a base de Hamel tem n elementos
E tem **dimensão infinita** se ela for infinita. ★

Exercícios

Exercício. Mostre que $|||\cdot|||_\infty$ define uma norma em E. ★

Exercício (EA2). Mostre que $(E, |||\cdot|||_\infty)$ não pode ser completo se E tem dimensão infinita (construa uma série absolutamente convergente que não convirja!) ★

Exercícios

Exercício. Seja E um e.v.n. e suponha que existam F_n, $n \in \mathbb{N}$, subespaços fechados e próprios de E tais que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Use o Teorema das categorias de Baire para mostrar que E não é Banach.
Use este resultado para provar as afirmações

- o espaço vetorial real P de todos os polinômios (de uma variável real com coeficientes em $\mathbb{R}$) não é completo com qualquer que seja a norma.
- Se B é uma base de Hamel de um espaço de Banach de dimensão infinita, então B não é enumerável. ★

A6 Exemplos uteis - Espaços de sequências [Muj, p.5]

Seja $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ e defina $\|x\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$.

$$\boxed{\ell_\infty} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ \|x\|_\infty < \infty\} \tag{A6.1}$$

$$\boxed{c} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \text{ converge}\} \tag{A6.2}$$

$$\boxed{c_0} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \to 0\} \tag{A6.3}$$

$$\boxed{c_{00}} = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K} : \ x_j \neq 0 \text{ para finitos índices}\} \tag{A6.4}$$

são espaços vetoriais e $\|x\|_\infty$ é uma norma neles.
$c_{00} \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$

A6.1 Desigualdades de Hölder e Minkowski

Lema A6.1. *Sejam $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$. Então:*

$$a^\lambda b^{(1-\lambda)} \leq \lambda a + (1-\lambda) b$$

com igualdade se e só se $a = b$. $\triangleleft$

Lema A6.2 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \qquad \forall x, y \geq 0$$

$$\sum |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum |\eta_j|^q\right)^{1/q}$$ $\triangleleft$

Lema A6.3 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Então*

$$\left(\sum |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |\eta_j|^p\right)^{1/p}$$ $\triangleleft$

Então para $p \in [1, \infty)$ definimos

$$\boxed{\ell_p} := \left\{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ sequência em } \mathbb{K} \ : \ \|x\|_p < \infty\right\} \tag{A6.5}$$

com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p}$.

Teorema A6.4. *(sendo $\mathbb{K}$ completo) ℓ_p é Banach para $p \in [1, \infty]$.* $\triangleleft$

Observação A6.5. Com a mesma construção podemos considerar espaços de sequencias em E, sendo E um e.v.n: por exemplo

$$\boxed{\ell_p(E)} := \left\{ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq E : \ \|x\|_p < \infty \right\} \tag{A6.6}$$

com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \right)^{1/p}$ (ou $\|x\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\|_E$) ★

Também podemos considerar produtos de e.v.n: $\boxed{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n}$ com a norma $\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_{E_j}^p \right)^{1/p}$ (ou $\|x\|_\infty := \max_{j=1,..,n} \|x_j\|_{E_j}$)

Concluímos que se $E, E_1, .., E_n$ são Banach então $\ell_p(E)$ e $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ são Banach, em particular $\mathbb{K}^n$ é Banach (com todas as normas vistas)

Exercícios

Exercício. Prove que

- para $p \in [1, \infty)$, o fecho[a] de c_{00} em ℓ_p é ℓ_p
- o fecho[a] de c_{00} em ℓ_∞ é c_0.
- c_0 e c são fechados em ℓ_∞, logo são espaços de Banach com a norma infinito (note que $c, c_0 \not\subseteq \ell_p$ se $p < \infty$).
- c_{00} não é completo com nenhuma das normas vistas (é um subespaço não fechado)
- mostre que se $1 \leq p < q \leq \infty$ e $x \in \ell_p \cap \ell_q$ então $\|x\|_q \leq \|x\|_p$. Conclua que $\ell_p \subset \ell_q$. ★

[a] E' tabém o completamento

A6.2 Espaços de funções

Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)} = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \; mensuravel : \; \|f\|_p < \infty \right\} \tag{A6.7}$$

onde $\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} & se\ p \geq 1 \\ \|f\|_\infty := supess_{x\in\Omega} |f(x)| \end{cases}$

Lema A6.6 [Hölder]. *Sejam* $p, q > 1$*:* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Se $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e* $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \Sigma, \mu)$ *então* $fg \in \mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \triangleleft$$

Lema A6.7 [Minkowski]. *Seja* $p \geq 1$*. Se* $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *então* $f + g \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ *e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \triangleleft$$

Se

$$\boxed{L_p(\Omega, \Sigma, \mu)} := \{[f] : \; f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)\} \tag{A6.8}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência "$f \sim g$ se $f = g$ q.t.p", então $\| \; \|_p$ é norma para L_p.

A7 Aplicações lineares

Sejam E, F e.v.n. sobre $\mathbb{K}$. Definimos

$$\mathcal{L}_?(E,F) = \{T : E \to F : \mathit{linear}\}$$

Espaço das aplicações (transformações) lineares de E em F.

Definição.
$T \in \mathcal{L}_?(E,F)$ é **limitada** se $\exists\ c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$, $\forall x \in E$. ★

Proposição A7.1. *Se $T \in \mathcal{L}_?(E,F)$, são equivalentes:*

1. *T é contínua (uniformemente),*
2. *T é contínua em 0,*
3. *T é limitada.* ◁

Definimos [2]

$$\boxed{L(E,F)} = \{T : E \to F : \mathit{linear\ e\ limitada}\}$$

$$\begin{aligned} \boxed{\|T\|_{L(E,F)}} &:= \inf\{c \geq 0 : \|Tx\| \leq c\|x\|,\ \forall\ x \in E\} \\ &= \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \end{aligned} \tag{A7.1}$$

Proposição A7.2. *Se F é completo então $L(E,F)$ é completo.*
Em particular $E^* := L(E,\mathbb{K})$ (dito espaço dual de E) é sempre completo. ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que (A7.1) é de fato uma norma, que as formulações em (A7.1) são equivalentes e que a definição de T limitada é equivalente a pedir que os sup em (A7.1) sejam finitos. ★

Exercício. Mostre que se $T \in L(E,F)$ e $S \in L(F,Z)$ então $S \circ T \in L(E,Z)$ e $\|S \circ T\| \leq \|S\|\ \|T\|$. ★

[2] Cuidado, a definição não é universal: em [Fol99], [Car07] e [Muj] a notação L é como aqui, mas em [Bre11] usa $\mathcal{L}$ para o conjunto das contínuas/limitadas.

Definição A7.3. Para e.v.n definimos

- **isomorfismo** **(topológico)**: $T \in L(E, F)$ inversível com $T^{-1} \in L(F, E)$ logo $\exists\, c, C > 0 : c\|x\|_E \leq \|Tx\|_F \leq C\|x\|_E,\ \forall x \in E$.
- **mergulho** $T \in L(E, F)$ que é isomorfismo de E em $T(E)$
- um isomorfismo/mergulho é dito **isométrico** se $\|Tx\|_F = \|x\|_E, \quad \forall x \in E$

★

Teorema A7.4. *Todos os e.v.n. de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ são topologicamente isomorfos entre si.* ◁

Corolário A7.5. *Os e.v.n. sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n*

- *têm todas as normas equivalentes*
- *têm uma única topologia possível*
- *são todos Banach*
- *têm bolas fechadas sempre compactas (são* **localmente compactos***)*

> *Um espaço topológico (X, τ) é dito* **localmente compacto** *quando para todo $x \in X$ existe $A \in \tau$: $x \in A$ e $\overline{A}$ é compacto. Para e.v.n é equivalente a pedir que $\overline{B_1(0)}$ seja compacta.* ◁

Corolário A7.6. *Subespaços de dimensão finita de um e.v.n são fechados.* ◁

Exercícios

Exercício. Sejam E e F e.v.n. com $F \neq \{0\}$:

(i) Mostre que se E tem dimensão finita, então $L(E, F) = \mathcal{L}_?(E, F)$.

(ii) Mostre que se E tem dimensão infinita, então existe um funcional linear sobre E não limitado, ou seja, $L(E, F) \subsetneq \mathcal{L}_?(E, F)$ ★

Teorema A7.7 [Riesz]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ tal que $\bar{B}_1(0) = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é compacta. Então E tem dimensão finita.* $\triangleleft$

Lema A7.8 [Lemma de Riesz]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ e $M \subsetneq E$ um subespaço vetorial fechado. Então, para cada $\theta \in (0,1)$, existe $y \in E$ tal que $\|y\| = 1$ e $dist(y, M) \geq \theta$.* $\triangleleft$

Temos então que um e.v.n é localmente compacto se e só se tem dimensão finita.

Exercícios

Exercício. Mostre que se M tem dimensão finita então a desigualdade no Lema também é válida para $\theta = 1$.
Mostre que, em outros casos, ela não pode ser válida com $\theta = 1$ (contraexemplo em $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ com $f(0) = 0$). ★

Exercício. Use o Teorema de Riesz para mostrar que se E é um e.v.n. de dimensão infinita e se $K \subset E$ é um compacto, então $K' = \emptyset$. ★

A8 Separabilidade

Um espaço métrico (E, d) é dito **separável** se existir um subconjunto enumerável $D \subseteq E$ que é denso em E.

Proposição A8.1. *Seja E um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset E$. Então F é separável.* $\lhd$

Proposição A8.2. *Se existe uma família não enumerável de abertos em E, não vazios e a 2 a 2 disjuntos, então E não é separável.* $\lhd$

Exercícios

Exercício. São separáveis

- $\mathbb{K}^n$ (separado por $\mathbb{Q}^n$ ou $\mathbb{Q}^{2n}$)
- ℓ_p com $1 \leq p < \infty$ (separados por $c_{00}(\mathbb{Q})$) e também c, c_0.
- também E^n, $\ell_p(E)$, $c(E)$, $c_0(E)$ se E é separável.
- $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \, \|_U)$ (Teorema da Aproximação de Weierstrass)

ℓ_∞ não é separável. ★

Exercício. Sejam E um e.v.n, $\{x_n\}$ uma sequência em E e $M = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ (combinações lineares (finitas) de elementos da sequência).
Mostre que se M é denso em E, então E é separável. ★

LEMBRETE:[Fol99, pag. 6]
– $card(X) \ \leq (resp. = \ // \ resp. \geq) \ card(Y)$ significa que existe $f : X \to Y$ injetora (resp bijetora // , resp. sobrej.)
– X enumerável significa $card(X) \leq card(\mathbb{N})$,
– um produto cartesiano finito de enumeráveis é enumerável
– uma reunião enumerável de enumerãveis é enumerável
– $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ não é enumerável
—

A9 Outros exercícios

Definição A9.1. Seja E um espaço de Banach com $dimE = \infty$. Uma sequência $\{s_n\} \subseteq E$ é dita **base de Schauder** para E se para cada elemento $x \in E$ existir uma única sequência $\{a_n\} \subseteq \mathbb{K}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n$. ★

Exercícios

Exercício.

- Mostre que $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$ é uma base de Schauder para ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, para c_0, mas não para ℓ_∞.
- Encontre uma base de Schauder para c.
- Mostre que se E possui uma base de Schauder então é separável.

★

B1 Funcionais lineares

- Os elementos de $\mathcal{L}_?(E, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares**
- Os elementos de $L(E, \mathbb{K})$ são ditos **funcionais lineares contínuos** (limitados). $E^* := L(E, \mathbb{K})$ é dito dual de E e é sempre Banach.

B2 O Teorema de Hahn Banach

Um **funcional sublinear** num e.v.n E, é uma função $p : E \to \mathbb{R}$ tal que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \text{e} \quad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x, y \in E,\ \forall \lambda \geq 0.$$

Exemplos: um funcional linear, uma norma, uma seminorma[3], atendem à definição.

Teorema B2.1 [Hahn-Banach real]. *Sejam*

- *E um espaço vetorial real,*
- *p um funcional sublinear em E,*
- *M um subespaço*
- *f um funcional linear em M tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$.*

Então existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em E tal que $\widetilde{f}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ e $\widetilde{f}|_M = f$. [Fol99, prova:p.158] ◁

Teorema B2.2 [Hahn-Banach complexo]. *Sejam*

- *E um espaço vetorial ~~real~~ complexo,*
- *p ~~um funcional sublinear~~ uma seminorma em E,*
- *M um subespaço*
- *f um funcional linear em M tal que $\cancel{f(x) \leq p(x)}$ $|f(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M$.*

Então existe um funcional linear $\widetilde{f}$ em E tal que $\cancel{\widetilde{f}(x) \leq p(x)}$ $|\widetilde{f}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$ e $\widetilde{f}|_M = f$. ◁

[3](uma **seminorma** deve satisfazer as propriedades de norma exceto a condição $\|x\| = 0 \implies x = 0$)

Relação espaço real / espaço complexo

- Seja E um e.v. sobre $\mathbb{C}$, definimos $E_{\mathbb{R}}$ o e.v. sobre $\mathbb{R}$ obtido limitando a multiplicação aos escalares reais. Se E for normado também induz uma norma em $E_{\mathbb{R}}$.
- Dado $f \in \mathcal{L}_{?}(E, \mathbb{C})$, vale $\phi := \Re e(f) \in \mathcal{L}_{?}(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ e $f(x) = \phi(x) - i\phi(ix)$
- Dado $\phi \in \mathcal{L}_{?}(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$, vale $f(x) := \phi(x) - i\phi(ix) \in \mathcal{L}_{?}(E, \mathbb{C})$
- Além disso $\|f\|_{E^*} = \|\phi\|_{E_{\mathbb{R}}^*}$

B2.1 Algumas consequências do T. de Hahn-Banach

Corolário B2.3 [Extensão de funcional mantendo a norma]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$, M um subespaço e $f \in M^*$. Então existe um funcional $\widetilde{f} \in E^*$ tal que $\widetilde{f}|_M = f$ e $\left\|\widetilde{f}\right\|_{E^*} = \|f\|_{M^*}$* ◁

Teorema B2.4 [Existem muitos funcionais]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$.*

a. *Se M é um subespaço fechado e $x_0 \in E \setminus M$, existe $f \in E^*$ tal que $f|_M = 0$, $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = d(x_0, M) = \inf_{m \in M} \|x_0 - m\|$.*

b. *Se $x_0 \neq 0$, existe $f \in E^*$ tal que $\|f\| = 1$ e $f(x_0) = \|x_0\|$.*

c. *Os funcionais lineares limitados em E separam pontos.*

◁

Exercícios

Exercício. Se E é não trivial, vale $\|x\|_E = \max_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|=1}} |f(x)|$ (mostre que a norma é igual ao sup e que o sup é atingido)
Mostre que ao contrário, na formula já vista $\|f\|_{E^*} = sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)|$, o sup pode não ser atingido (pense no espaço das funções contínuas em $[0,1]$ com $f(0) = 0$. Veja também o ex 1.4 (p. 21) do [Bre11]) ★

Exercício. Mostre que um subespaço M de em e.v.n. E é denso se e só se vale que

$$\forall \phi \in E^* \ t.q. \ \phi|_M = 0, \ vale \ \phi \equiv 0$$

★

Exercício (EB1). Sejam $e_i = (\delta_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$, $i \in \mathbb{N}$, $h = (1/j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1, ...)$.
Mostre que existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ mas $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$,
Mostre que não existe $\phi \in (\ell_\infty)^*$ tal que $\phi(e_i) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\phi(h) \neq 0$. ★

B2.2 Outras consequências

Proposição B2.5. *Se E é um e.v.n. e E^* é separável então E também é separável.* $\triangleleft$

Observação. A reciproca não é verdadeira ★

Proposição B2.6. *Todo e.v.n. separável é isometricamente isomorfo a um subespaço de ℓ_∞.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício (EB2)**.** Seja E é um e.v.n. de dimensão infinita e separável.

- Mostre que existe uma sequência de subespaços de dimensão finita cuja reunião é densa.
- Mostre que existe uma sequência ϕ_n em E^* com $\|\phi_n\| = 1$ e tal que $\phi_n(x) \to 0$ para todo $x \in E$

★

B3 Dual, bidual e reflexividade

Outra consequência do Teorema de Hahn-Banach é

Teorema B3.1 [Mergulho canônico]. *Seja E um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Dado $x \in E$ defina $\hat{x} : E^* \to \mathbb{K}$ por*

$$\hat{x}(f) = f(x), \quad \forall f \in E^*.$$

Então a aplicação

$$J : E \to E^{**} : x \mapsto \hat{x}$$

é um mergulho isométrico de E em E^{**}. ◁

Definição. J é dito **mergulho canônico** de E em E^{**};
Um e.v.n E é dito **reflexivo** se $J(E) = E^{**}$. ★

Algumas consequências

Proposição B3.2. *se E é reflexivo então*

- *E é Banach*
- $\|f\|_{E^*} = max_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} |f(x)|$ ◁

Exemplos:

Proposição B3.3. *Se $p \in [1, \infty)$ e $p' = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty]$, então $(\ell_p)^*$ é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}$.* [Muj, p.42] ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que ℓ_1 é isometricamente isomorfo a $(c_0)^*$ e $(c)^*$ (dois diferentes isomorfismos) mas apenas a um subespaço próprio de $(\ell_\infty)^*$. ★

Corolário B3.4. *ℓ_p com $p \in (1, \infty)$ é reflexivo.*
Não são reflexivos ℓ_1, ℓ_∞, c_0 e c ◁

Observação B3.5. No caso particular de sequencias finitas ($\mathbb{K}^n$), temos então que o dual de $(\mathbb{K}^n, \| \|_p)$ é ismoetr. isom. a $(\mathbb{K}^n, \| \|_{p'})$. Isso inclusive para $p = \infty$ (podemos ver $\mathbb{K}^n$ como subconjunto de c_0). Todos são então reflexivos. ★

B4 Versões geométricas de H-B (aqui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Um **hiperplano** (afim) é um conjunto da forma

$$H = [f = \alpha] := \{x \in E : f(x) = \alpha\}.$$

onde $f \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{R})$, $f \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição B4.1.

- *$[f = \alpha]$ é fechado se e somente se f é contínua.*
- *$[f = 0]$ é o único subespaço próprio de E que contém $[f = 0]$.*
- *$[f = \alpha]$ é fechado ou é denso em E* ◁

Definição B4.2. Se $A, B \subseteq E$ dizemos que $[f = \alpha]$ separa A e B

- no sentido fraco, se

$$f(x) \leq \alpha \quad \forall\, x \in A \quad \text{e} \quad f(x) \geq \alpha \quad \forall \quad x \in B\,.$$

- no sentido forte, se existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(x) \leq \alpha - \epsilon \quad \forall\, x \in A \qquad \text{e} \qquad f(x) \geq \alpha + \epsilon \quad \forall \quad x \in B\,. \qquad \bigstar$$

Teorema B4.3 [Hahn-Banach (Formas Geométricas]). *Seja E um espaço vetorial normado real e sejam $A, B \subseteq E$ dois conjuntos convexos, não vazios e disjuntos.*

FG1 Se A é aberto então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido fraco.

FG2 Se A é fechado e B é compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido forte.

◁

Dado um aberto convexo C com $0 \in C$, definimos o **Funcional de Minkowski de C**:

$$p(x) = \inf\{\beta^{-1} > 0 \ ; \ \beta\, x \in C\}$$

Lema B4.4. *p é um funcional sub-linear, $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$ e existe $M > 0$ tal que*

$$0 \le p(x) \le M\|x\|, \quad \forall \ \ x \in E\,.$$

◁

Lema B4.5. *Seja $C \subset E$ uma aberto convexo não vazio e $x_0 \in E \setminus C$. Então existe $f \in E^*$ tal que $f(x) < f(x_0)$ para todo $x \in C$. Em particular o hiperplano fechado de equação $[f = f(x_0)]$ separa C de x_0 no sentido fraco.* ◁

Exercícios

Exercício. Mostre que se C também é equilibrado (i.e. $\lambda x \in C \ \forall x \in C, \ \lambda \in \mathbb{K}, \ |\lambda| = 1$) então p é uma seminorma.
Se além disso C é limitado então p é uma norma. ★

Exercício. Faça o exercício 1.14 (p. 23-24) do [Bre11] (soma de subespaços fechados e separação). ★

B5 Consequências do Teorema de Baire

Definição B5.1. Uma **aplicação aberta** é uma aplicação $T : E \to F$ tal que se $A \subseteq E$ é aberto então $T(A) \subseteq F$ é aberto.

Uma **aplicação fechada** é uma aplicação $T : E \to F$ tal que o seu gráfico $G_T = \{(x, y) \in E \times F : \; y = Tx\}$ é um conjunto fechado em $E \times F$.

A condição pode ser escrita como

$$\text{se } (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F \text{ então } y = T(x) \tag{B5.1}$$

★

Exercícios

Exercício. Mostre que se T é linear então (B5.1) é equivalente a se $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$ ★

Exercício. Mostre que $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$ é aberta se e só se existe $r > 0$ tal que $B_r^F(0) \subseteq T(B_1^E(0))$ ★

Teorema B5.2 [Da aplicação aberta]. *Sejam E e F espaços de Banach. Se $T \in L(E, F)$ é sobrejetora, então T é aberta.* ◁

Corolário B5.3. *Se E e F são espaços de Banach e $T \in L(E, F)$ é bijetora, então T é um isomorfismo; isto é, $T^{-1} \in L(F, E)$.*

◁

Exercícios

Exercício. Se $T : (E, \| \, \|_1) \to (E, \| \, \|_2) : x \mapsto x$, ambos são Banach (com sua norma) e existe C: $\|x\|_2 \le C \, \|x\|_1$ em E, então as normas são equivalentes. ★

Exercício. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in L(E, F)$ sobrejetora. Mostre que existe $C > 0$ tal que para cada $y \in F$ pode-se encontrar $x \in E$ tal que

$$\|x\| \le C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$ ★

Teorema B5.4 [Do gráfico fechado]. *Se E e F são espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$ é fechada então T é contínua.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício (EB3). Denote por E o espaço $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ munido da norma $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|dt$, e por F o mesmo espaço com a norma uniforme. Mostre que a aplicação identidade $x \in E \mapsto x \in F$ tem gráfico fechado, mas não é contínua. ★

Exercício (EB4). Sejam E e F espaços de Banach. Seja $T : E \to F$ uma aplicação tal que $\varphi \circ T \in E^*$ para todo $\varphi \in F^*$. Prove que $T \in L(E, F)$. ★

Teorema B5.5 [Da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus]. *Sejam E espaço de Banach*[a]*, F e.v.n e $A \subseteq L(E, F)$. Se $\sup_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ para todo $x \in E$, então $\sup_{T\in A} \|T\| < \infty$.* $\triangleleft$

[a]É suficiente assumir que E, F sejam e.v.n e que $\sup\limits_{T\in A} \|Tx\| < \infty$ valha para x em subconjunto de segunda categoria

Corolário B5.6. *Sejam E, F como no Teorema e $\{T_n\} \subset L(E, F)$ tal que $\{T_n x\}$ converge para cada $x \in E$. Se $T : E \to F$ é definida por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, então $T \in L(E, F)$ e $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.* $\triangleleft$

Corolário B5.7. *Seja E um espaço de Banach e $\mathcal{B} \subset E^*$, suponha que $\{\phi(x),\ \phi \in \mathcal{B}\}$ seja limitado $\forall\ x \in E$. Então $\mathcal{B}$ é limitado.* $\triangleleft$

Corolário B5.8. *Se E é um e.v.n. e $B \subset E$, suponha que $\phi(B) = \{\phi(x),\ x \in B\}$ seja limitado $\forall\ \phi \in E^*$. Então B é limitado.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 2.4 (p. 49) do [Bre11] (Forma bilinear). ★

B6 Mais alguns resultados

B6.1 Espaço quociente

Seja E um e.v. e M um subespaço. [Muj, p.26]

- $x \sim y: \; x - y \in M$ é uma relação de equivalência em E;
- o **espaço quociente** E/M das classes de equivalência é um e.v. definindo

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad \lambda[x] = [\lambda x]$$

- $\pi : E \to E/M : x \mapsto [x]$ é dita **mapa quociente**, é linear e sobrejetora

Se E é normado definimos $\|[x]\|_q := inf_{x\in[x]} \|x\|_E$

Proposição B6.1. *se E é e.v.n. e M é subespaço fechado então*

- $[x] = x + M$ *e* $\|[x]\|_q = d(x, M)$
- $\| \; \|_q$ *é uma norma em* E/M
- π *é contínua e aberta. (em particular $\pi(B_E) = B_{E/M}$).*
- *Se E é completo, então E/M é completo também.*

$\triangleleft$

B7 Soma de subespaços

Proposição B7.1. *Seja E um espaço de Banach e M e N subespaços fechados de E tais que $M + N$ é fechado. Então existe $C > 0$ tal que:*
para todo $z \in M + N$, existem $x \in M$, $y \in N$ tais que $z = x + y$ e $\|x\|, \|y\| \leq C\|z\|$

Se $M \cap N = \{0\}$ então x, y são únicos e $z \mapsto (x, y)$ é linear e contínua. $\triangleleft$

Definição B7.2. Seja E um espaço de Banach e M um subespaço fechado. Um subespaço N é dito **complemento topológico de M** se N é fechado, $M \cap N = \{0\}$ e $M + N = E$. ★

- Subespaços de dimensão finita (ou fechados e de codimensão finita) sempre possuem complemento topológico.[Bre11, prova:p.38]

B8 Outros exercícios

Exercícios

Exercício (EB5). Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Prove a equivalência dos três resultados B5.4, B5.2 e B5.3. (Sugestão: passe pelo quociente E/N onde $N = \{x \in E : \; Tx = 0\}$.) ★

Notação. Uma notação frequentemente usada para funcionais é $\langle \phi, x \rangle := \phi(x)$ onde $\phi \in E^*$ e $x \in E$.
Para maior clareza às vezes usa $\langle \phi, x \rangle_{E^*,E}$ ★

Exercícios

Exercício. Seja E um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $T : E \to E^*$ um operador linear tal que $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$. Mostre que T é contínuo.

Dica: mostre que o gráfico é fechado. Suponha $x_n \to 0$ e $Tx_n \to \phi$. Mostre que $\phi(y) = 0$ para todo $y \in E$ avaliando $\langle T(x_n - \lambda y), (x_n - \lambda y) \rangle$ com $\lambda > 0$

Mostre agora o caso em que $\langle Tx, y \rangle = \langle Ty, x \rangle$ para todo $x, y \in E$ ★

C1 Transformações lineares não limitadas

Sejam E, F esp.de Banach.

Definição C1.1 (Trans. lin. "não-limitada"). Uma **transformação linear "não-limitada" de E em F** é uma transformação linear $T : D(T) \to F$, onde $D(T)$ é um subespaço de E.
Chamamos

- $D(T)$ é o Domínio de T,
- $G(T) = \{(x, Tx) \in E \times F : x \in D(T)\} \subseteq E \times F$ é o Gráfico de T,
- $R(T) = \{Tx \in F : x \in D(T)\} \subseteq F$ é a Imagem (Range) de T,
- $N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$ é o Núcleo de T.

T é dita

- densamente definida se $D(T)$ é denso em E.
- limitada se $\exists\ c \geq 0$ tal que $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E,\ \forall x \in D(T)$.
- fechada se $G(T)$ é fechado em $E \times F$
- fechável se $\overline{G(T)}$ é o gráfico de uma transformação linear

★

Comparação:

- $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$ fechada se $G(T)$ é fechado:
  - se $E \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ então $y = Tx$
  - equiv se $E \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$
- T não-limitada fechada se $G(T)$ é fechado em $E \times F$:
  - se $D(T) \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ então $x \in D(T)$ e $y = Tx$
- T não limitada é fechável se $\overline{G(T)}^{E \times F}$ é o gráfico de uma transformação linear:
  - se $D(T) \times F \ni (x_n, T(x_n)) \to (x, y) \in E \times F$ e $D(T) \times F \ni (x'_n, T(x'_n)) \to (x, y') \in E \times F$ então $y = y'$
  - equiv se $(x_n, T(x_n)) \to (0, y) \in E \times F$ então $y = 0$

Estaremos interessados principalmente em transformações lineares densamente definidas e fechadas/fecháveis.

Observação. Se T é limitada e densamente definida, podemos estendê-la a uma transformação linear limitada em E. (Neste caso, se $D(T) \neq E$, T não é fechada). ★

Observação. O Teorema da aplicação aberta e algumas suas consequências se estendem ao caso de T fechado:

Aplic. aberta para T fechada

Sejam E e F espaços de Banach, $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ fechada.

- se T é sobrejetora, então T é aberta (se A é um aberto de E então $T(A \cap D(T))$ é aberto).[TL80, p.212]
  Além disso, existe $C > 0$ tal que para cada $y \in F$ pode-se encontrar $x \in D(T)$ tal que
  $$\|x\| \leq C\|y\| \quad \text{e} \quad y = Tx.$$
- se T é bijetora, então $T^{-1} \in L(F, E)$.

Exercícios

Exercício.
- Considere $T : (c_{00}, \| \ \|_1) \to \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$ é bem definido? limitado? contínuo? fechado? fechável?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_i) \mapsto (ix_i)$ é limitado? densamente definido? fechado? fechável (se sim descreva o fecho dele)?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq \ell_1} \to \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é limitado? contínuo? fechado? fechável(se sim descreva o fecho dele)?
- Considere $T : c_{00\ \subseteq (c_0, \| \ \|_\infty)} \to \mathbb{K} : (x_i) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ é limitado? contínuo? fechado? fechável(se sim descreva o fecho dele)? ★

C2 Adjunto

Definição C2.1 (Adjunto (de contínuo)). Sejam E, F espaços de Banach e $T \in L(E, F)$.

Definimos o **adjunto de T** como $T^* : F^* \to E^* : \phi \mapsto \phi \circ T$ ★

Definição C2.2 (Adjunto (de não-limitado)). Sejam E, F espaços de Banach e $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma *transformação linear densamente definida*. Definimos o **adjunto de T** como $T^* : D(T^*) \to E^* : \phi \mapsto \overline{\phi \circ T}$ onde

$$D(T^*) = \{\phi \in F^* : \phi \circ T : D(T) \to \mathbb{K} \text{ é limitada}\} \subseteq F^*.$$

e $\overline{\phi \circ T}$ é a única extensão (por continuidade) de $\phi \circ T$ a um funcional linear contínuo em E. ★

Vale então

$$\boxed{\langle T^*\phi, x\rangle_{E^*,E} = (T^*\phi)(x) = \phi(Tx) = \langle \phi, Tx\rangle_{F^*,F} \quad \forall \;\; x \in D(T),\;\; \phi \in D(T^*).}$$

Teorema C2.3. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma transformação linear densamente definida (E, F Banach). Então*

- *T^* é linear e fechado.*
- *Se T é fechado então*
  - *$D(T^*)$ separa os pontos de F.*
  - *Se F é reflexivo então $D(T^*)$ é denso em F^*.*
- *Se $T \in L(E, F)$ então $T^* \in L(F^*, E^*)$ e $\|T\| = \|T^*\|$.* ◁

Exercícios

Exercício. Calcule o adjunto dos operadores

1. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax$ sendo A uma matriz $m \times n$
2. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_j) \mapsto (2^{-j} x_j)$
3. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_j) \mapsto (x_{j+1} + x_j)$
4. $T : D(T)_{\subseteq \ell_1} \to \ell_1 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, ..)$
5. $T : D(T)_{\subseteq \ell_3} \to \ell_2 : x \mapsto 2x$
6. $T : D(T)_{\subseteq \ell_2} \to \ell_3 : x \mapsto 2x$ ★

Exercício. Dados $S \in L(E;F)$, $T \in L(F;G)$, prove que $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$. Deduza que se T é um isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico), então T^* isomorfismo topológico (resp. isomorfismo isométrico). ★

C3 Relações de Ortogonalidade

Seja E um e.v.n, $M \subseteq E$ e $N \subseteq E^*$. Definimos os **ortogonais**[4]

$$M^{\perp} = \{f \in E^* : f(x) = 0, \quad \forall x \in M\}$$

$$N^{\perp\!\!\!\!\ast} = \{x \in E : f(x) = 0, \quad \forall f \in N\}.$$

Proposição C3.1. • *$M^{\perp}$, $N^{\perp\!\!\!\!\ast}$ são subsepaços fechados (de E^* e de E resp.)*

- *se M, N são subespaços (de E e de E^* resp.), então vale*

$$(M^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\ast} = \overline{M} \qquad (N^{\perp\!\!\!\!\ast})^{\perp} \supset \overline{N}$$

(se E é reflexivo então $(N^{\perp\!\!\!\!\ast})^{\perp} = \overline{N}$)

◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 1.16 (p. 24) do [Bre11] ★

Exercício. Se M_1, M_2 são subespaços vetoriais do e.v.n. E com $M_1 \subseteq M_2$ e N_1, N_2 subespaços vetoriais de E^* com $N_1 \subseteq N_2$, então $M_2^{\perp} \subseteq M_1^{\perp}$ e $N_2^{\perp\!\!\!\!\ast} \subseteq N_1^{\perp\!\!\!\!\ast}$. ★

Exercício. Mostre que, se M é subespaço de E

$$M^{\perp} = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{M} = E$$

Mostre que o mesmo não vale pra $N^{\perp\!\!\!\!\ast}$ e E^*. ★

Exercício. Sejam Y e Z subespaços vetoriais fechados do e.v.n. E, então

$$Y \cap Z = (Y^{\perp} + Z^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\ast}, \tag{C3.1}$$

$$Y^{\perp} \cap Z^{\perp} = (Y + Z)^{\perp}, \tag{C3.2}$$

$$(Y \cap Z)^{\perp} \supseteq \overline{Y^{\perp} + Z^{\perp}}, \qquad (Y^{\perp} \cap Z^{\perp})^{\perp\!\!\!\!\ast} = \overline{Y + Z}. \tag{C3.3}$$

[4] A notação mais comum é $N^{\perp}$.

Os gráficos de T e T^* estão ligados por uma **relação de ortogonalidade** simples.

Proposição C3.2. *Sejam E, F espaços de Banach e $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ uma transformação linear densamente definida. Seja $\mathcal{J} : F^* \times E^* \to E^* \times F^* : (\psi, \phi) \mapsto (-\phi, \psi)$ então,*

$$G(T)^{\perp} = \{(-T^*\psi, \psi) : \ \psi \in F^*\} = \mathcal{J}(G(T^*)) \qquad \triangleleft$$

Teorema C3.3. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido. Então*

$i*)$ $N(T) \subseteq R(T^*)^{\underline{\perp}}$

$ii)$ $\boxed{N(T^*) = R(T)^{\perp}}$ e logo $iv)$ $\boxed{N(T^*)^{\underline{\perp}} = \overline{R(T)}}$

Se T é também fechado então

$i)$ $\boxed{N(T) = R(T^*)^{\underline{\perp}}}$ e logo $iii)$ $\boxed{N(T)^{\perp} \supseteq \overline{R(T^*)}}$

(se E é reflexivo então $N(T)^{\perp} = \overline{R(T^*)}$) $\triangleleft$

Corolário C3.4. *Nas condições acima, vale*

$$T \text{ sobre} \implies T^* \text{ inj} \tag{C3.4}$$

$$T^* \text{ sobre} \implies T \text{ inj} \tag{C3.5}$$

Se E ou F tem dimensão finita, então valem as reciprocas $\triangleleft$

C3.1 Caracterização de Transformações Lineares com Imagem Fechada

Teorema C3.5. *Seja T linear fechada e densamente definida. Então, são equivalentes:* [TL80, p...240..][Rud73, p...96..]

$i)$ $R(T)$ é fechada

$ii)$ $R(T^*)$ é fechada

$iii)$ $R(T) = N(T^*)^{\underline{\perp}}$

$iv)$ $R(T^*) = N(T)^{\perp}$ $\triangleleft$

Lema C3.6. *Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido e fechado. Se existe $C > 0$ tal que*

$$\|\phi\| \leq C\|T^*\phi\| \quad \forall\, \phi \in D(T^*),$$

então T é aberta e logo sobrejetora. ◁

C4 Exercícios

Exercícios

Exercício. Reveja os exercícios 2.22 e 2.23 (p.53) do [Bre11] ★

Exercício (EC1). Considere as aplicações $T : D(T)_{\subseteq E} \to F : x \mapsto x$ pegando como E, F todas as possíveis combinações de c_0 e ℓ_p (com $1 \leq p \leq \infty$).
• Defina apropriadamente $D(T)$, encontre $R(T)$, discuta se a mapa for inj e/ou sobre, continua, fechada, densamente definida
• Defina apropriadamente T^* e $D(T^*)$, repita a discussão acima para T^* ★

Exercício (EC2). Considere as aplicações $T : E \to F$

1. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
2. $T : \ell_1 \to \ell_2 : (x_j) \mapsto (2^{-j}x_j)$
3. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_2, x_3, ..)$
4. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, ..)$
5. $T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_1, x_2, x_3, ..) \mapsto (x_2, x_3, ..)$

Encontre entre elas exemplos de

- $R(T) = F$, $R(T) \neq F$, $R(T)$ fechada/não fechada
- $R(T^*) = E^*$, $R(T^*) \neq E^*$, $R(T^*)$ fechada/não fechada
- T injetora/não injetora,
- $\sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\|$ finito ou infinito
- $\sup_{\|Tx\|\leq 1} \|x\|$ finito ou infinito
- casos em que $T = T^*$ ou não. ★

Exercício. Mostre que a aplicação $T : E \to E : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ fornece um exemplo de:

- afirmação (iii) do Teorema C3.3 com inclusão estrita, se $E = \ell_1$;
- reciprocas do corolário C3.4 falsas, se $E = \ell_2$.

★

Exercício. Seja $T : D(T)_{\subseteq E} \to F$ densamente definido e fechado.

- Mostre que se existe $C > 0$ tal que

$$\|\phi\| \leq C\|T^*\phi\| \quad \forall\, \phi \in D(T^*), \tag{C4.1}$$

(como nas hipóteses do lema C3.6), pode-se mostrar diretamente que T^* é injetora e sua imagem é fechada (note que pelo Teorema C3.5 isso implica T sobrejetora).

- Mostre que, analogamente, se tivermos que existe $C > 0$ tal que

$$\|x\| \leq C\|Tx\| \quad \forall\, x \in D(T), \tag{C4.2}$$

então T é injetora, sua imagem é fechada e T^* é sobrejetora.

- Mostre enfim que a desigualdade (C4.1) (resp. (C4.2)) pode ser obtida quando T (resp. T^*) é sobrejetora, aplicando o corolário B5.7 (resp. B5.8) ao conjunto $\{\phi \in D(T^*) : \|T^*\phi\| \leq 1\}$ (resp. $\{x \in D(T) : \|Tx\| \leq 1\}$),

★

D1 Topologia fraca

Definição D1.1. Se τ_1, τ_2 são duas topologias no conjunto X, dizemos que τ_2 é mais fina que τ_1, se $\tau_1 \subseteq \tau_2$ (mais fina se tem mais abertos) ★

Definição D1.2. Se (X, τ) é um espaço topológico, $C \subseteq X$ é dito **compacto** se toda cobertura aberta de C possui uma subcobertura finita.

> se $C \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ onde $\{A_i\} \subseteq \tau$ então existe un subconjunto finito de índices $I_0 \subseteq \mathcal{I}$ tal que $C \subseteq \bigcup_{i \in I_0} A_i$

Seja E um conjunto. Podemos definir em E uma topologia σ como sendo a menor topologia que contenha toda uma família de conjuntos $\mathcal{F}$.

A topologia toma a forma

$$\sigma = \left\{ \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \bigcap_{i \in I_j} F_{i,j} : \; F_{i,j} \in \mathcal{F}, \; \mathcal{J} \text{ conjunto qualquer, } I_j \text{ conjuntos finitos} \right\}$$

(reuniões quaisquer de interseções finitas de elementos da família)

Em particular, se $x \in A \in \sigma$ existe um $B \in \sigma$ tal que $x \in B \subseteq A$, da forma

$$B = \bigcap_{i=1,..,N} F_i, \tag{D1.1}$$

onde $x \in F_i \in \mathcal{F}$ para $i = 1, .., N$: **os conjuntos da forma (D1.1) formam uma base de vizinhanças para x.**

Definição D1.3 (Topologia fraca). Seja E um e.v.n. e $\boxed{\tau}$ sua **topologia forte**: a induzida pela norma. Definimos[5] em E a **topologia fraca**, denotada[6] por $\boxed{\sigma = \sigma(E, E^*)}$, tomando a família geradora

$$\mathcal{F} = \left\{\phi^{-1}(A) : \ \phi \in E^*, \ A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto}\right\} . \quad \bigstar$$

Desta forma todo $\phi \in E^*$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca:

A topologia fraca é a menos fina que preserve a continuidade dos $\phi \in E^*$

Outra **base de vizinhanças para** x é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon,\phi_1,..,\phi_N}(x) := \{y \in E : \ |\phi_i(y - x)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., N\} \tag{D1.2}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $\phi_i \in E^*$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

Proposição D1.4. *Se $\{x_n\}$ é uma sequência em (E, σ), então $x_n \to x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ $\forall \phi \in E^*$.* ◁

Proposição D1.5. *Se (Z, Σ) é um espaço topológico e $\psi : (Z, \Sigma) \to (E, \sigma)$ é uma função então, ψ é contínua se, e somente se, $\varphi \circ \psi : Z \to \mathbb{K}$ é contínua $\forall \varphi \in E^*$.* ◁

Proposição D1.6. *A topologia fraca $\sigma = \sigma(E, E^*)$*

- *é Hausdorff*
- *se E tem dimensão finita, coincide com à topologia forte τ.*
- *se E tem dimensão infinita,*
  - *é estritamente menos fina da topologia forte τ.*
    - *todo aberto de σ contém uma reta,*
    - *nenhuma bola é um aberto de σ*
  - *não pode ser metrizada* ◁

[5] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $E_\tau = (E, \tau)$ e $E_\sigma = (E, \sigma(E, E^*))$.
[6] Cuidado: a notação varia... em alguns livros muda a ordem.

Lema D1.7. *Se E é e.v.n e $\phi, \phi_1, .., \phi_n \in \mathcal{L}_?(E, \mathbb{K})$ com $\bigcap_{i=1,..,N} N(\phi_i) \subseteq N(\phi)$, então ϕ é combinação linear dos ϕ_i* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Mostre que

$$+ : \; E_\sigma \times E_\sigma \longrightarrow E_\sigma : \; (x, y) \mapsto x + y$$
$$\cdot : \; \mathbb{K} \times E_\sigma \longrightarrow E_\sigma : \; (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

são contínuas (use as bases de vizinhanças!) ★

Notação D1.8. Escreveremos

- $\boxed{x_n \rightharpoonup x}$ (x_n conv. fracamente a x) quando a convergência é na top. fraca,
- $\boxed{x_n \to x}$ (x_n conv. fortemente a x) quando a convergência é na top. forte ★

Proposição D1.9. *Seja $\{x_n\}$ uma sequência em E. Temos que:*

i) $x_n \rightharpoonup x \iff \phi(x_n) \to \phi(x) \quad \forall \quad \phi \in E^*$
ii) $x_n \to x \implies x_n \rightharpoonup x$
iii) $x_n \rightharpoonup x \implies \{\|x_n\|\}$ *é limitada e* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$
iv) $x_n \rightharpoonup x$ *e* $\phi_n \to \phi$ *em* $E^* \implies \phi_n(x_n) \to \phi(x)$. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Mostre que, se $p \in (1, \infty)$, a sequência $e_n = (\delta_{i,n})$ converge fracamente mas não fortemente em ℓ_p.
O que pode dizer para os casos $p = 1$ e $p = \infty$?
O que pode dizer da sequência $c_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i$? ★

Teorema D1.10. *Sejam E e F e.v.n. e $T \in \mathcal{L}_?(E, F)$. São equivalentes as continuidades dos operadores*

$$T : E_\tau \to F_\tau : x \mapsto Tx$$
$$T : E_\sigma \to F_\sigma : x \mapsto Tx$$
$$T : E_\tau \to F_\sigma : x \mapsto Tx$$
$\triangleleft$

D1.1 Convexos na topologia fraca

Teorema D1.11 [Mazur]. *Se E é um e.v.n. e $C \subseteq E$ é convexo, são equivalentes:*

a) *C fechado na topologia forte*
b) *C fechado na topologia fraca*
c) *C coincide com a interseção de todos os semiespaços fechados que o contêm.*

$\triangleleft$

Corolário D1.12. *Se E tem dimensão infinta, então*

$$\overline{S^E}^{\sigma(E,E^*)} = \overline{B^E}^{\tau}$$

e logo S^E não é fechado na topologia fraca. $\triangleleft$

Definição D1.13. Dado um conjunto $A \subseteq E$, definimos **envoltória convexa** (ou convexificado) de A, denotado por *co*(A): o menor convexo de E que contém A:

$$\boxed{\text{co(A)}} = \left\{ \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i : \; N \in \mathbb{N}, \; \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1, \; \lambda_i \geq 0, \; a_i \in A \right\} \qquad \bigstar$$

Corolário D1.14. *Se $x_n \rightharpoonup x$ então existe uma sequência de combinações lineares convexas dos x_n que converge fortemente para x.* $\triangleleft$

D2 Topologias em E^*

Seja E^* o dual de um e.v.n, $\boxed{\tau}$ sua **topologia forte** (a induzida pela norma) e $\boxed{\sigma = \sigma(E^*, E^{**})}$ a **topologia fraca**.

Definimos[7] a **topologia fraca***, denotada por $\boxed{\sigma^* = \sigma(E^*, E)}$ Tomando a família geradora

$$\mathcal{F} = \left\{(Jx)^{-1}(A) : \ x \in E, \ A \subseteq \mathbb{K} \text{ aberto}\right\} .$$

É imediato que $\sigma(E^*, E) = \sigma(E^*, E^{**})$ *se* E *é reflexivo, e nunca é mais fina.*

Uma **base de vizinhanças para** ϕ é composta pelos conjuntos da forma

$$V_{\varepsilon, x_1, .., x_N}(\phi) := \{f \in E^* : \ |\phi(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \ \forall i = 1, .., N\} \tag{D2.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ e $x_i \in E$ para um número finito de $i = 1, .., N$.

Desta forma todo $\Phi \in J(E)$ será ainda contínuo com respeito à topologia fraca*.

Analogamente *toda mapa* $\phi \mapsto \phi(x)$ *(avaliação em* x *fixado) será contínua com respeito à topologia fraca*.*

Proposição D2.1. *A topologia fraca** $\sigma^* = \sigma(E^*, E)$

- *é Hausdorff,*
- *se* E^* *tem dimensão finita, coincide com* τ *e com* $\sigma(E^*, E^{**})$.
- *se* E *é reflexivo, coincide com* $\sigma(E^*, E^{**})$.
- *se* E *não é reflexivo*
  - *é estritamente menos fina da topologia fraca* $\sigma(E^*, E^{**})$. *Em particular* $[\Phi = 0]$ *é um (convexo) não fechado sempre que* $\Phi \notin J(E)$.
  - *não pode ser metrizada* $\triangleleft$

[7] Denotaremos aqui, quando não der confusão, $E^*_\tau = (E^*, \tau)$, $\quad E^*_\sigma = (E^*, \sigma(E^*, E^{**}))$, $E^*_{\sigma^*} = (E^*, \sigma(E^*, E))$.

Notação D2.2. Escreveremos $\boxed{f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f}$ (f_n converge fraco-estrela a f) quando a convergência é na topologia fraca* ★

Proposição D2.3. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em E^*. Temos que*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \iff \langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \quad \forall x \in E.$

ii) Se $\|f_n - f\|_{E^*} \to 0$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e se* $f_n \rightharpoonup f$, *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

iii) Se E é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, *então* $\{\|f_n\|\}$ *é limitada e* $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

iv) Se E é Banach e $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *e* $x_n \to x$, *então* $f_n(x_n) \to f(x)$.

◁

Exercícios

Exercício. Prove a Proposição acima ★

Exercício. Considere a sequência $t_n = Tr^n(\mathbf{1}) = (1, .., 1, .0...)$ em l_∞. Mostre que ela não converge forte, converge fraco-estrela (mas não fraco) a $\mathbf{1}$ (e logo não converge fraco). ★

D3 Compacidade e Teorema de Banach-Alaoglu

Exercícios

Exercício. Mostre que em espaços topológicos

- se f é contínua e K é compacto então $f(K)$ é compacto
- K compacto implica K fechado (precisa Hausdorff: tome um ponto p no complementar e mostre que é interior construindo duas famílias de abertos $A_x \cap B_x = \emptyset$ com $\{A_x\}_{x\in K}$ que cobre K e $p \in B_x$ $\forall x \in K$ ...)
- se $F \subseteq K$ com F fechado e K compacto então F é compacto (adicionando F^c uma cobertura aberta de F cobre K ...)

★

O resultado mais importante, e principal motivação para a introdução das topologias fracas é o seguinte:

Teorema D3.1 [Banach-Alaoglu]. *Seja E um e.v.n. A bola $\overline{B_{E^*}} = \{f \in E^* : \|f\| \leq 1\}$ é compacta na topologia $\sigma(E^*, E)$.* ◁

A sua prova depende do Teorema de Tychonoff

Espaço e topologia produto, Teorema de Tychonoff

- Dada uma família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, o **produto cartesiano** da família é o conjunto

$$P = \boxed{\prod_{\alpha\in A} X_\alpha} := \{f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$
$$= \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} : \ x_\alpha \in X_\alpha, \quad \forall \alpha \in A\}.$$

  Denotaremos este conjunto por X^A quando todos os conjuntos X_α são cópias de X.

- Sejam $\boxed{\pi_\beta} : \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta : x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \to x_\beta$ as *projeções* do produto em cada fator.

- Se cada X_α é dotado de uma topologia τ_α, podemos colocar em $\prod X_\alpha$ a **topologia produto** (denotada por $\boxed{\prod_{\alpha\in A}\tau_\alpha}$): gerada pela família
$$\mathcal{F} = \left\{\pi_\alpha^{-1}(U) : \ \alpha \in A, \ U \in \tau_\alpha\right\} .$$
Uma **base de vizinhanças para** x é composta pelos conjuntos da forma
$$V_{\varepsilon,\alpha_1,..,\alpha_N}(x) := \left\{ y \in \prod X_\alpha : \ |x_{\alpha_i} - y_{\alpha_i}| < \varepsilon \ \forall i = 1,..,N \right\} \quad \text{(D3.1)}$$
onde $\varepsilon > 0$ e $\alpha_i \in A$ para um número finito de $i = 1,..,N$.

Teorema D3.2 [Tychonoff]. *(Usa Axioma da Escolha!) Se cada (X_α, τ_α) é compacto então $\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha, \prod_{\alpha\in A}\tau_\alpha\right)$ é compacto* $\triangleleft$

Passos da prova do Teorema D3.1.

- Seja $T : (E^*, \sigma^*) \to (\mathbb{K}^E, \prod \tau_{\mathbb{K}}) : \phi \mapsto (\phi(x))_{x\in E}$: é mergulho topológico
- vale $T(\overline{B^{E^*}}) \subseteq \prod_{x\in E} \overline{B^{\mathbb{K}}_{\|x\|}}$, o qual é um compacto.
- $T(\overline{B^{E^*}})$ é fechado, logo compacto.
- $\overline{B^{E^*}}$ é compacto na top. σ^*. $\square$

D4 Mais cosias..

Observação D4.1. Os Corolários B5.7 (resp. B5.8) podem ser reformulados concluindo que um conjunto limitado na topologia fraca* (resp. fraca) é fortemente limitado. ★

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 3.1,..,3.5 (p. 79...) do [Bre11] ★

E1 Reflexividade

Proposição E1.1. *Se E é um espaço (de Banach) reflexivo, então E^* é reflexivo.* $\triangleleft$

Proposição E1.2. *Se E é um espaço (de Banach) reflexivo, todo seu subespaço fechado é reflexivo.* $\triangleleft$

Lema E1.3. *Se E e F são espaços de Banach isomorfos, então E é reflexivo se e só se F é reflexivo.* $\triangleleft$

Proposição E1.4. *Se E é um espaço de Banach e E^* é reflexivo, então E é reflexivo.* $\triangleleft$

Teorema E1.5. *Se E é um espaço de Banach, então E é reflexivo se, e somente se, E^* é reflexivo.* $\triangleleft$

Lembrete

- Se E é um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset E$, então F é separável.
- Se E é um e.v.n. e E^* é separável então E também é separável.
- A reciproca não é verdadeira

Teorema E1.6. *Se E é um espaço de Banach, então E é reflexivo e separável, se e somente se, E^* é reflexivo e separável.* $\triangleleft$

Teorema E1.7 [Kakutani]. *Seja E um e.v.n.*
E é reflexivo se, e somente se, $\overline{B_E}$ é compacta na topolgia fraca. $\triangleleft$

Lema E1.8. *Seja E um e.v.n. $J : E_\sigma \to E^{**}_{\sigma^*}$ é contínua e (quando existe) sua inversa é contínua.* $\triangleleft$

Lema E1.9 [Lema (Goldstine]). *Seja E um e.v.n. Então $J(\overline{B_E})$ é denso em $\overline{B_{E^{**}}}$ com a topologia $\sigma^* = \sigma(E^{**}, E^*)$.*
Também $J(E)$ é denso em E^{**} com a mesma topologia. $\triangleleft$

Lema E1.10 [Lema (Helly]). *Seja E um e.v.n, $(f_1, \dots, f_n) \in (E^*)^n$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ e*

$$\boldsymbol{T} : E \to \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))\,;$$

então, são equivalentes

i) *Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \overline{B_E}$ tal que*

$$\|\boldsymbol{T}(x_\epsilon) - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty < \epsilon,$$

ii) *Para todo $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}^n$,*

$$|\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}| \;\leq\; \|\,\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{T}\,\|_{E^*}\,.$$

$\triangleleft$

Juntando resultados obtidos, temos esta importante conseqência:

Corolário E1.11. *Seja E é um espaço de Banach reflexivo. Se $K \subseteq E$ é fechado, limitado e convexo, então K é compacto na topologia fraca.* $\triangleleft$

E2 Separabilidade e metrização da bola

Teorema E2.1. *Seja E um e.v.n. Então E é separável, se e somente se, $(\overline{B_{E^*}}, \sigma(E^*, E))$ é metrizável.*
Uma métrica é

$$d_{\sigma^*}(\phi, \psi) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)|$$

onde $\{x_n\}$ é denso em $\overline{B^E}$.

$\triangleleft$

Teorema E2.2. *Seja E um e.v.n. Então E^* é separável, se e somente se, $(\overline{B_E}, \sigma(E, E^*))$ é metrizável.*
Uma métrica é

$$d_\sigma(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|$$

onde $\{f_n\}$ é denso em $\overline{B^{E^*}}$. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça a prova do Teorema E2.2 imitando a do Teorema E2.1 e usando o exercício 3.24 (p. 85...) do [Bre11]. ★

Corolário E2.3. *Nas hipóteses do Teorema E2.1 (resp. E2.2) para limitados de E^* (resp. de E), compacidade e compacidade sequêncial são equivalentes.* $\triangleleft$

Temos então

Corolário E2.4. *Se E é um e.v.n. separável e $\{f_n\}$ é uma sequência limitada de E^*, então existe subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(E^*, E)$ (conv. fraca*).* $\triangleleft$

Teorema E2.5. *Seja E um espaço (de Banach) reflexivo e $\{x_n\}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(E, E^*)$ (conv. fraca).* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 3.16 (p. 83) do [Bre11] ★

Exercício. Faça os exercícios 3.17 e 3.18 (p. 83) do [Bre11] ★

Exercício. Faça o exercício 3.22 (p. 84) do [Bre11] ★

Exercício. Faça o exercício 3.25 (p. 85) do [Bre11] ★

E3 Espaços uniformemente convexos

Definição E3.1. Um e.v.n E é dito **uniformemente convexo** se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B_E}, \quad \text{e} \quad \|x - y\| \geq \epsilon \;\Rightarrow\; \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta. \tag{E3.1}$$

★

Exemplo E3.2.

- Veremos que espaços com produto interno são u.c.
- Considere $\mathbb{R}^2$ com as normas $\| \ \|_p$: é fácil ver que é u.c. se $p \in (1, \infty)$, mas não é u.c. se $p = 1$ ou $p = \infty$. ★

Teorema E3.3 [Milman-Pettis]. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.* ◁

Corolário E3.4. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.* ◁

Proposição E3.5. *Seja E uniformemente convexo e $\{x_n\}$ uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup_{n \to \infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$.

Em particular, convergência fraca mais convergência da norma implica convergência forte. ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 3.32 (apenas pontos 1 e 2) (p. 87) do [Bre11] (vai precisar a noção de convexidade estrita: procure no livro e veja o ex 3.31 também). ★

E3.1 Aplicação

Definição E3.6. Uma função $\Phi : E \to (-\infty, +\infty]$ é dita

- semicontínua inferiormente (l.s.c.) se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $[\Phi \leq \lambda] = \{x \in E : \ \Phi(x) \leq \lambda\}$ é fechado.
- convexa se o conjunto $\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : \ y \geq \Phi(x)\}$ é convexo; equivalentemente, $\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$: $x, y \in E$, $t \in (0, 1)$. ★

Corolário E3.7 [do Teorema D1.11]. *Se Φ é convexa e semicontínua inferiormente (ou contínua) na topologia τ, então é semicontínua inferiormente na topologia $\sigma(E, E^*)$.*

Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$, então[8]

$$\Phi(x) \leq \liminf \Phi(x_n). \qquad \triangleleft$$

Corolário E3.8 [do Corolário E1.11]. *Seja E um espaço de Banach reflexivo, $\emptyset \neq A \subseteq E$ um convexo fechado. Seja $\Phi : A \to (-\infty, \infty]$ convexa, própria ($\Phi \not\equiv +\infty$), semicontínua inferiormente e, se A é ilimitado,*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \Phi(x) = +\infty. \tag{E3.2}$$

Então Φ alcança seu mínimo em A; isto é, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\Phi(x_0) = \min_{x \in A} \Phi(x). \qquad \triangleleft$$

[8] Lembre que a definição de fechado por seq. não implica na topológica, mas a topológica implica na por seq, ou seja, se F é fechado e $x_n \to x$ com $\{x_n\} \subset F$ então $x \in F$

E4 Mais exercícios

Exercícios

Exercício. Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não).

	Banach	Separáv.	Reflex.	Unif. Conv.
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$				
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$				
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_1)$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$				
$(c, \|\cdot\|_\infty)$				
ℓ_1				
ℓ_∞				

★

F1 Medida e integração em três páginas

Tarefa

Leia a introdução do capítulo 4 e seção 4.1 (pag.89..91) do [Bre11].

Dado um conjunto Ω,

- uma **σ-álgebra** em Ω é uma família não vazia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω, fechada por complementação e por reunião enumerável (logo contém $\emptyset$, Ω e é fechada por interseções enum.).
  - Se X é um espaço topológico, a $\sigma-$álgebra $\mathcal{B}_X$ gerada pelos conjuntos abertos em X é chamada $\sigma-$álgebra de Borel em X.
- Uma **medida** é uma função $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ tal que[9]

  i) $\mu(\emptyset) = 0$.

  ii) $\mu\left(\coprod_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$.

  - a medida é
    * *completa*, se $E \subseteq F \in \mathcal{M}$ com $\mu(F) = 0$ implica $E \in \mathcal{M}$
    * *finita* se $\mu(\Omega) < \infty$
    * *σ-finita* se Ω é reun. enum. de conjuntos de medida finita
  - A medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$ é construída de forma que seja completa e que a medida dos (multi)retângulos seja sua área.
- uma função $f : (X, \mathcal{M}) \to (Y, \mathcal{N})$ é **mensurável** se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ para todo $E \in \mathcal{N}$.
  - Se $(Y, \mathcal{N})$ é $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, uma *condição equivalente* é $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
  - *mensurabilidade é preservada* por soma, produto, supremo pontual, limite pontual.

[9] Como consequência vale $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ e também $A \subseteq B \Longrightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

- Uma função simples (a valores reais) é uma combinação linear finita de funções características de elementos de $\mathcal{M}$:

$$\phi = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathcal{X}_{E_j} : \quad a_j \in \mathbb{R},\ E_j \in \mathcal{M} .$$

Funções mensuráveis podem ser aproximadas por funções simples.

- A **integral** (em Ω) de uma função mensurável f, com respeito à medida μ:

$$\int_\Omega f \, d\mu ,$$

é definida[10] aproximando f por funções simples ϕ e definindo

$$\int_\Omega \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} a_j \mu(E_j) .$$

- Importante: *Funções Riemann-integráveis (em sentido próprio) são Lebesgue-integráveis e a integral coincide.*[11]

F1.1 Resultados importantes

Definição F1.1. Se f, g são mensuráveis, dizemos que $f = g$ quase toda parte (q.t.p.) [almost everywhere: a.e.] se $\mu(\{f \neq g\}) = 0$. Analogamente dizemos que uma propriedade acontece q.t.p se acontece exceto num conjunto de medida nula. ★

Teorema F1.2 [da Convergência Monótona]. *Se $\{f_n\}$ é uma sequência de funções mensuráveis tal que $0 \leq f_j \leq f_{j+1}$ q.t.p. para todo j, e $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_{j\in\mathbb{N}} f_j)$, então*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_j \, d\mu .$$

◁

[10] Precisa um pouco de cuidado: a definição é feita antes para funções não negativas, depois estendida a funções reais ou complexas separando $\Re e(f)^{\pm}$ e $\Im_m(f)^{\pm}$.

[11] As impróprias absolutamente integráveis podem ser definidas diretamente como integrais Lebesgue; as não abs.int. ainda precisam ser definidas por limite

Proposição F1.3. *Se $f \geq 0$ e mensurável,*

- $\int f\, d\mu = 0$ *se e somente se* $f = 0$ *q.t.p.*
- *se* $\int f\, d\mu < \infty$, *então* $\{x : f(x) = \infty\}$ *é um conjunto de medida nula* ($f < \infty$ *q.t.p.*) *e* $\{x : f(x) > 0\}$ *é* $\sigma-$*finito.*

$\triangleleft$

Lema F1.4 [de Fatou]. *Se $\{f_n\}$ é qualquer sequência de mensuráveis com $f_n \geq 0$, então*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu. \quad \triangleleft$$

Teorema F1.5 [da Convergência Dominada]. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(\mu)$ tal que*
(a) $f_n \to f$ q.t.p,
(b) existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.t.p. para todo n.
Então $f \in L^1(\mu)$ e

$$\int f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n\, . \qquad \triangleleft$$

F1.2 Produtos de medidas. Tonelli e Fubini.

É também possível definir produtos de medidas (no produto dos conjuntos) e calcular integrais no produto como integrais iteradas:

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f\, d(\mu \times \nu) &= \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) \\ &= \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y) \end{aligned} \tag{F1.1}$$

Em particular:

Teorema F1.6 [de Fubini-Tonelli]. [Fol99, p.67] *Suponha que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ são espaços de medida $\sigma-$finitos.*

a) (Tonelli) *Se $f : X \times Y \to [0, \infty]$ é mensurável, então as funções $g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ e $h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$ são mensuráveis e vale* (F1.1).

b) (Fubini) *Se* $f \in L^1(X \times Y)$*, então* $f(x,y) \in L^1(Y)$ *para quase todo* $x \in X$*,* $f(x,y) \in L^1(X)$ *para quase todo* $y \in Y$*, as funções definidas quase sempre* $g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ *e* $h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x)$ *estão em* $L^1(X)$ *e* $L^1(Y)$*, respectivamente, e vale* (F1.1). $\triangleleft$

F2 Algumas definições

Definição F2.1. Definimos a função de truncamento

$$T_n(z) = \frac{z}{|z|}\min\{n, |z|\}, \qquad n \in \mathbb{N};$$

Note que $T_n \circ f \to f$ pontualmente e $|T_n \circ f| \leq |f|$ ★

Definição F2.2. O **suporte** supp(f) de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f \equiv 0|_{\Omega \setminus F}$.

Dizemos que f tem **suporte compacto** em Ω se existe um compacto $K \subset \Omega$ tal que $f \equiv 0$ em $\Omega \setminus K$.

O espaço das funções contínuas a suporte compacto em Ω é indicado por $\boxed{\mathcal{C}_c(\Omega)}$ ★

F3 Espaços L^p

Lembrete (veja seção A6.2)

Dado espaço de medida (completa) (Ω, Σ, μ) definimos

$$\boxed{L^p(\Omega, \Sigma, \mu)} = \Big\{[f] : \ f : \Omega \to \mathbb{K} \ mensuravel : \ \|f\|_p < \infty\Big\} \qquad \text{(F3.1)}$$

onde $[f]$ é a classe de equivalência de f com respeito à relação de equivalência "$f \sim g$ se $f = g$ q.t.p",

$$\boxed{\|f\|_p} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} & se\ p \geq 1 \\ \|f\|_\infty := supess_{x\in\Omega} |f(x)| \end{cases}$$

é uma norma. ($supess_{x\in\Omega} f(x) := inf\{C \in \mathbb{R} : \ f \leq C \ q.t.p. \ em \ \Omega\}$).

Lema F3.1 [Hölder]. *Sejam $p, q > 1$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \triangleleft$$

Lema F3.2 [Minkowski]. *Seja $p \geq 1$. Se $f, g \in L^p(\Omega)$ então $f + g \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \triangleleft$$

Observação F3.3. Podemos definir L^p também com $0 < p < 1$: é um espaço vetorial mas $\| \|_p$ não é uma norma.

De fato vale, para $a, b \geq 0$,

$$a^p + b^p \leq (a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \qquad p \in [1, \infty). \qquad \text{(F3.2)}$$

$$2^{p-1}(a^p + b^p) \leq (a + b)^p \leq (a^p + b^p), \qquad p \in (0, 1) \qquad \text{(F3.3)}$$

com desigualdades estritas se $a, b > 0$. ★

Observação F3.4 (Algumas obs. simples)**.**

- Se $\mu(\Omega) < \infty$ então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p \leq \infty$ (inclusão contínua: $\|f\|_q \leq \mu(\Omega)^{1/q-1/p} \|f\|_p$).
- Se μ é medida de contagem então $L^p(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$ para $1 \leq p < q \leq \infty$ (inclusão contínua). ★

Exercícios

Exercício. Prove que $\| \ \|_\infty$ é mesmo uma norma e que Hölder e Minkowski valem também com $q = 1, \ p = \infty$. ★

Exercício. Prove as desigualdades (F3.2)-(F3.3), calculando a imagem da função $\frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ com $x \in [0, \infty)$ ★

Exercício. Prove as afirmações da Observação F3.4.
Prove com exemplos a necessidade da condição $\mu(\Omega) < \infty$ e que podem não valer as inclusões inversas . ($X \subseteq Y$ com inclusão contínua significa que existe $C > 0$: tal que $\|\cdot\|_Y \leq C \|\cdot\|_X$). ★

Teorema F3.5 [Fischer-Riesz]. *L^p é um espaço de Banach para todo $p \in [1, \infty]$.* ◁

Proposição F3.6 [“Reciproca” da conv. dominada]. *Se $p \in [1, \infty]$ e $f_n \to f$ em $L^p(\Omega)$, então existe uma subsequência f_{n_k} que converge q.t.p e é dominada, ou seja, existe $h \in L^p(\Omega)$:*
– $f_{n_k} \to f$ q.t.p.
– $|f_{n_k}| \leq h$ q.t.p. ◁

APLICAÇÃO

Definição F3.7 (Operador de Nemitiskiĭ)**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e $p, q \in [1, \infty)$ O **Operador de Nemitiskiĭ** de L^p em L^q associado a f é o operador

$$N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega) : u(x) \mapsto f(u(x))$$

★

Teorema F3.8. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz a condição de crescimento*

$$|f(s)|^q \leq c(|s|^p + 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e N_f o Operador de Nemitiskiĭ de L^p em L^q associado a f. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto limitado, então $N_f : L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ é um operador (não-linear) contínuo. ◁

Observação F3.9. Mais em geral podemos obter um resultado análogo considerando uma função $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|f(x, s)|^q \leq c(|s|^p + 1), \quad \forall s \in \mathbb{R},\ x \in \Omega$$

e definindo $N_f : u(x) \mapsto f(x, u(x))$ (veja por exemplo em [de 89, pag.11]). ★

Exercícios

Exercício. Mostre que em qualquer espaço topológico, $x_n \to x$ é equivalente a:
toda subsequência de $\{x_n\}$ possui uma subsequência que tende a x. ★

F4 Convexidade, reflexividade, representação de Riesz

Teorema F4.1.

- *L^p é* **unif. convexo** *e* **reflexivo** *para $p \in (1, \infty)$.*
- *L^p* **não é reflexivo** *para $p = 1$ e $p = \infty$ (exceto casos "triviais")*

$\triangleleft$

Teorema F4.2.

- *$(L^p)^*$ é isometricamente isomorfo a $L^{p'}$, para $p \in (1, \infty)$.*
- *$(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞, desde que a medida seja $\sigma-$finita.*
- *$(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1. O subespaço é próprio (exceto casos "triviais").*

$\triangleleft$

Lema F4.3 [1a des. de Clarkson]. *Sejam $a, b \in \mathbb{K}$ e $2 \leq p < \infty$. então*

$$\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p \leq \frac{|a|^p + |b|^p}{2}. \tag{F4.1}$$

Logo, se $f, g \in L^p(\Omega)$, então

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p. \tag{F4.2}$$

$\triangleleft$

Corolário F4.4. *L^p é reflexivo para $p \in [2, \infty)$.* $\triangleleft$

Lema F4.5. *$T : L^{p'} \to (L^p)^* : u \mapsto [\phi_u : f \mapsto \int_\Omega fu]$ é uma isometria, para $p \in (1, \infty)$.*
O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é $\sigma-$finita e para $p = \infty$ $\triangleleft$

Proposição F4.6. *L^p é reflexivo para $p \in (1, 2]$.* $\triangleleft$

> **Proposição F4.7.** *T é sobrejetora para $p \in (1, \infty)$.*
> *O mesmo vale para $p = 1$ se a medida é $\sigma-$finita mas não vale para $p = \infty$ (exceto casos "triviais").* $\lhd$

Em particular, mostramos o seguinte

Teorema F4.8 [de Representação de Riesz]. *Seja $1 \leq p < \infty$ e $\phi \in (L^p(\Omega))^*$ (no caso $p = 1$ assumimos misura $\sigma-$finita).*
Então existe um único $u \in L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf\,, \quad \forall\ f \in L^p(\Omega).$$

Além disso $\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^p(\Omega))^*}$ $\lhd$

Isto permite identificar $L^{p'}(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))^*$.

Observação F4.9. Existe uma 2a des. de Clarkson, que mostra que L^p é u.c. e logo reflexivo também no caso $p \in (1, 2]$. O resultado completo é o seguinte: [Clarkson] sejam $u, v \in L^p(\Omega)$, e $p' = \dfrac{p}{p-1}$.
Se $2 \leq p < \infty$, então

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}\ \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p, \tag{F4.3}$$

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \geq \left(\frac{1}{2}\ \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}. \tag{F4.4}$$

Se $1 < p \leq 2$, então

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^{p'} \leq \left(\frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p \right)^{p'-1}, \tag{F4.5}$$

$$2^{2-p} \left(\left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|_{L^p}^p \right) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\ \|v\|_{L^p}^p. \tag{F4.6}$$

★

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 (p. 118...) do [Bre11]. ★

F5 Densidade, separabilidade

Alguns resultados da teoria da medida:

- ([Fol99, Th.2.10]) Se $f : (X, \mathcal{M}) \to \mathbb{C}$ é mensurável, existe uma sequência $\{\phi_n\}$ de funções simples tais que $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$, $\phi_n \to f$ pontualmente e $\phi_n \to f$ uniformemente em qualquer subconjunto onde f é limitada.
- ([Fol99, Th.2.40]) Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ é Lebesgue mensurável, então sua medida de Lebesgue satisfaz

  $$\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subseteq A \text{ } aberto\} = \sup\{\mu(K) : E \supseteq K \text{ } compacto\}$$

  Além disso, se $\mu(E) < \infty$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma coleção finita de retângulos disjuntos $\{R_j\}_{j=1}^N$ cujos lados são intervalos tais que $\mu(E \Delta \cup_{j=1}^N R_j) < \epsilon$.

Proposição F5.1. *[Fol99, p.183..]*

- *Se $1 \le p \le \infty$, o conjunto das funções simples $f = \sum_{j=1}^N a_j \mathcal{X}_{E_j}$ é denso em $L^p(\Omega)$.*
- *Se $1 \le p < \infty$, os E_j podem ser tomados de medida finita*
- *Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, os E_j de medida finita podem ser substituídos por (multi-)retângulos de extremos racionais* ◁

Corolário F5.2. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e a medida é a de Lebesgue, então $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \le p < \infty$.*
Mais em geral, $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ é separável para $1 \le p < \infty$ se $\mathcal{M}$ é gerada por uma família enumerável de seus elementos (espaço de medida separável). ◁

Proposição F5.3. *$L^\infty(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não é separável (exceto casos "triviais")* ◁

Proposição F5.4. *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e a medida é a de Lebesgue, então $C_c(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Procure exemplos de

- $L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ não separável com $p \in (1, \infty)$.
- sequência limitada em $L^1([0,1])$ (medida de Lebesgue) que não admite subsequências fracamente convergentes.
- $\phi \in (L^1)^*$ que não pode ser representada por $u \in L^\infty$.

★

Exercício. Mostre que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \| \|_\infty)$ não é separável. ★

F6 Particularidades de L^1 e L^∞

- Quando L^1 e L^∞ são e.v.n. **finito dimensionais** (medida com apenas finitos conjuntos de medida positiva, a menos de conjuntos nulos), vale
  - eles são reflexivos e separáveis,
  - $(L^\infty)^*$ é isometricamente isomorfo a L^1 e $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞
- em caso contrário
  - L^1 e L^∞ não são reflexivos e L^∞ *não é separável*.
  - $(L^1)^*$ é isometricamente isomorfo a L^∞ se a medida é σ-finita mas $(L^\infty)^*$ *não é isometricamente isomorfo a* L^1.
  - se a medida não é $\sigma-$finita pode existir $\phi \in (L^1)^*$ não representado por uma $u \in L^\infty$

Quando a medida é $\sigma-$finita (por ser o dual de L^1), L^∞ tem as propriedades:

- a bola fechada é compacta na $\sigma^* = \sigma(L^\infty, L^1)$,
- quando L^1 é separável, a bola fechada é metrizável e seq. limitadas tem subseq conv. fraco*
- $(L^\infty)^*$ contém um subespaço isometricamente isomorfo a L^1, que coincide com a imagem da isometria $T_1 : L^1 \to (L^\infty)^* : f \mapsto [\phi_f : u \mapsto \int_\Omega fu]$

  Isto permite identificar L^1 e $T_1(L^1) \subseteq (L^\infty)^*$.

  Porém (exceto casos triviais quando L^1 é reflexivo), T_1 não é sobrejetora

Exercícios

Exercício (EF1). Faça o exercício 4.13 (p. 121...) do [Bre11]. ★

F7 Convolução

Definição F7.1. • O **suporte** supp(f) de uma função $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ é o menor fechado F tal que $f \equiv 0|_{F^c}$.

O **suporte** de uma função (classe de eq.) $f \in L^p(\Omega)$ é a interseção dos fechados F tais que $f|_{F^c} = 0$ q.t.p.

Vale que $f = 0$ q.t.p. no complementar de supp(f)

- Dadas $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{K}$ definimos a **convolução**

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy\,. \tag{F7.1}$$

- Se $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^N$, definimos a translação $(\tau_h f)(x) := f(x+h)$. ★

Proposição F7.2. *Se as integrais* (F7.1) *correspondentes existem,*

- $f * g = g * f$
- $(f * g) * h = f * (g * h)$
- $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g = f * (\tau_h g)$
- $\mathrm{supp}(f * g) \subset \overline{\mathrm{supp}(f) + \mathrm{supp}(g)}$.

  Em particular, se os supp. de f, g são compactos então o de $f * g$ também é compacto. ◁

Teorema F7.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então,*

- *$f(x-y)g(y)$ é integrável em y (para q.t.x)*
- *$f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\boxed{\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p.}$$

◁

Exercícios

Exercício. Mostre que todo aberto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ pode ser escrito como $A = \bigcup\{B_r(q) :\ r \in \mathbb{Q},\ q \in \mathbb{Q}^N,\ B_r(q) \subseteq A\}$.
Deduza que se $f = 0$qtp em A_i, para todo A_i de uma família (possivelmente não enumerável) de abertos, então $f = 0$qtp na reunião deles. ★

Exercício. Encontre conjuntos fechados A e B em $\mathbb{R}^N$ tais que $A + B$ não é fechado.
Mostre que se A é compacto e B é fechado então $A + B$ é fechado mas

pode não ser compacto.
Mostre que se A e B são compactos então $A + B$ é compacto. ★

Teorema F7.4. [Fol99, p.56] *Seja $\phi : X \times [a,b] \to \mathbb{C}$ integrável em X para todo $\tau \in [a,b]$. Seja $\Phi(\tau) = \int_X \phi(\xi,\tau)\, d\xi$.*

a) *Suponha que existe $h \in L^1(X)$ tal que $|\phi(\xi,\tau)| \le h(\xi)$ para todo ξ,τ. Se $\lim_{\tau\to\tau_0} \phi(\xi,\tau) = \phi(\xi,\tau_0)$ para todo ξ, então $\lim_{\tau\to\tau_0} \Phi(\tau) = \Phi(\tau_0)$; em particular, se $\phi(\xi,\cdot)$ é contínua para cada ξ, então Φ é contínua.*

b) *Suponha que $\frac{\partial\phi}{\partial\tau}$ exista e que existe $h \in L^1(X)$ tal que $|\frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\xi,\tau)| \le h(\xi)$ para todo ξ,τ. Então Φ é derivável e $\Phi'(\tau) = \int_X \frac{\partial\phi}{\partial\tau}(\xi,\tau)\, d\xi$.* $\triangleleft$

Proposição F7.5. *Se $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ então* [12]

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \quad e \quad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g, \ |\alpha| \le k. \qquad \triangleleft$$

Definição F7.6. Chamamos **sequência regularizante** (ou de molificadores) toda sequência $(\rho_n)_{n\ge1}$ de funções tais que

$$\boxed{\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),} \ \boxed{\mathrm{supp}(\rho_n) \subset B_{\frac{1}{n}}(0),} \ \boxed{\int \rho_n = 1,} \ \boxed{\rho_n \ge 0 \text{ em } \mathbb{R}^N.}$$

Um exemplo pode ser construído assim: seja $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$:

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Então $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{supp}(f) \subset B_1(0)$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)dx > 0$. Logo um oportuno reescalamento fornece uma sequência regularizante. ★

Proposição F7.7. *Seja ρ_n uma sequência regularizante.*

- *Se $f \in C(\mathbb{R}^N)$ então $\rho_n * f \to f$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N$.*
- *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$, então $\rho_n * f \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$.* $\triangleleft$

> Uma função contínua em um compacto é uniformemente contínua.

[12] $C_c^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
$L^p_{loc}(\Omega)$ é o espaço das funções que são $L^p(K)$ para qualquer compacto $K \subset \Omega$

Corolário F7.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer. Então $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.* $\triangleleft$

Corolário F7.9. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto qualquer e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\int uf = 0$ para toda $f \in C_c^\infty(\Omega)$. Então $u = 0$ q.t.p. em Ω.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 4.15, 4.16 (pontos 1,2), 4.19 e 4.21 (p. 118...) do [Bre11] ★

F8 Compactos em $\mathcal{C}(K)$: Arzelá-Ascoli

Um conjunto E num espaço métrico (X, d), é dito **totalmente limitado** se, para cada $\epsilon > 0$, E pode ser coberto por um número finito de bolas de raio ϵ.

Teorema F8.1. [Fol99, p.15] *Um conjunto E num espaço métrico (X, d), é compacto se e só se é completo e tot. limitado.* $\triangleleft$

Definição F8.2. Uma família $\mathcal{F}$ de funções é dita

- equicontínua em x se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança U de x tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $y \in U$ e $f \in \mathcal{F}$,
- equicontínua se for equicontínua em todo ponto
- pontualmente limitada se $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ é limitado para todo x. ★

Teorema F8.3 [Arzelá-Ascoli]. [Fol99, p.137] *Se K é um espaço compacto e Hausdorff e $\mathcal{F}$ uma família equicontínua e pontualmente limitada em $(\mathcal{C}(K), \|\ \|_\infty)$, então $\mathcal{F}$ é totalmente limitada e seu fecho é compacto ($\mathcal{F}$ relativamente compacto).* $\triangleleft$

F9 Compactos em L^p: Fréchet-Kolmogorov

Lema F9.1. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \le p < \infty$. Então*

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

$\triangleleft$

Teorema F9.2 [Fréchet-Kolmogorov]. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, $\omega \subset\subset \Omega$* [13] *e $1 \le p < \infty$. Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ satisfaz:*

- *$\mathcal{F}$ é limitado*
- $$\begin{gathered} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega) \text{ tal que} \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon,\ \forall h \in \mathbb{R}^N \text{ com } |h| < \delta \text{ e } \forall f \in \mathcal{F}. \end{gathered} \tag{F9.1}$$

Então $\mathcal{F}|_\omega$ é relativamente compacto em $L^p(\omega)$. $\triangleleft$

Observação F9.3. $\chi_{[n,n+1]}$ em $\mathbb{R}$ satisfaz as hipóteses, mas não possui subsequência convergente. O mesmo com $n\chi_{(0,1/n)}$ em $L^1((0,1))$.
Para concluir a compacidade em $L^p(\Omega)$ precisa uma condição a mais: ★

Corolário F9.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \le p < \infty$.*
Se $\mathcal{F} \subseteq L^p(\Omega)$ é limitado, satisfaz (F9.1) para todo $\omega \subset\subset \Omega$ e além disso vale:

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \text{ existe } \omega \subset\subset \Omega \text{ tal que } \sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{L^p(\Omega \setminus \omega)} < \varepsilon. \tag{F9.2}$$

Então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$. $\triangleleft$

Proposição F9.5. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $1 \le p < \infty$. Se $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $L^p(\Omega)$, então satisfaz as condições do Corolário F9.4.*
$\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Prove a Proposição acima (ex. 4.34 do [Bre11]). ★

[13] $\omega \subset\subset \Omega$ significa que ω é aberto e $\overline{\omega}$ é um compacto contido em Ω.

Um exemplo de compacto pode ser obtido da seguinte forma:

Corolário F9.6. *Seja* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *uma função fixa e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto limitado de* $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$. *Se*

$$\mathcal{F} = g * \mathcal{B} := \{g * b : b \in \mathcal{B}\},$$

então $\mathcal{F}\,|_\omega$ *é relativamente compacto em* $L^p(\omega)$ *para todo* $\omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado.* $\lhd$

G1 Espaços com produto interno

Seja H um esp vetorial. Um **produto escalar** (ou produto interno) em H é uma função $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ tal que

- $(x, y) = \overline{(y, x)}$ para todo $x, y \in H$.
- $(ax + bx', y) = a\,(x, y) + b\,(x', y)$ para todo $x, x', y \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- $(x, x) \geq 0$, e $(x, x) = 0$ se e somente se $x = 0$.

Também vale:

- $(x, ay + by') = \bar{a}\,(x, y) + \bar{b}\,(x, y')$ para todo $x, y, y' \in H$, $a, b \in \mathbb{K}$.
- desigualdade de **Cauchy-Schwarz**
$$|\,(x, y)\,| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}}\,(y, y)^{\frac{1}{2}}\,.$$
(a igualdade vale se e só se x e y são lin. dep.
- A função $\|\cdot\| : H \to \mathbb{R}$ definida por $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$ é uma **norma**.
- *identidade do paralelogramo*
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in H.$$
- *Teorema de Pitágoras*: se $(x, y) = 0$ (escrevemos $x \perp y$: x, y são ortogonais) então
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$
Mais geralmente, se $x_1, \cdots, x_n$ são vetores dois a dois ortogonais então
$$\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$
- *Fórmula de polarização*
$$(x, y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} \left[+i\,\frac{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2}{4} \right]$$

Proposição G1.1. *Seja E um e.v.n. real [complexo] cuja norma verifica a lei do paralelogramo. Então a fórmula de polarização define um produto interno em E que induz a normal original.* ◁

G2 Espaços de Hilbert

Definição G2.1. Um **espaço de Hilbert** é um e.v.n com produto interno que é também completo. ★

- $\mathbb{K}^N$ com o produto
$$(x,y) = \sum_1^N x_i \overline{y_i}$$
é um espaço de Hilbert.

- ℓ_2 com o produto
$$(x,y) = \sum_1^\infty x_i \overline{y_i}$$
é um espaço de Hilbert.
– c_{00} pode ser munido do mesmo produto escalar, mas não é completo com a norma induzida

- $L^2(\Omega)$ com o produto interno
$$(f,g) = \int_\Omega f\bar{g}$$
é um espaço de Hilbert.
– $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_2)$ pode ser munido do mesmo produto escalar, mas não é completo.
– se $p \neq 2$, a norma de L^p não pode ser induzida por um produto escalar.
– a norma em $(\mathcal{C}([0,1]), \| \|_\infty)$ não pode ser induzida por um produto escalar.

Proposição G2.2. *Todo espaço de Hilbert é uniformemente convexo e portanto reflexivo.* ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 5.2 (p. 147) do [Bre11] ★

G3 Projeção sobre convexos

Lema G3.1. *Se $C \neq \emptyset$ é um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Hilbert H e $x_0 \in H$, existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\| := d(x_0, C). \qquad \triangleleft$$

Definição G3.2. Escrevemos $y_0 = P_C x_0$ e dizemos que P_C é a projeção sobre o convexo C. ★

Proposição G3.3. *Nas condições do Lema G3.1, $P_C x_0$ é caracterizado por*

$$\boxed{P_C x_0 \in C \qquad e \qquad \Re e \, (x_0 - P_C x_0, w - P_C x_0) \leq 0, \quad \forall w \in C.} \qquad \triangleleft$$

Proposição G3.4. *Nas condições do Lema G3.1,*

$$\|P_C x_1 - P_C x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in H,$$

logo P_C é contínua. $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.6 e 5.8 (p. 148) do [Bre11] ★

Observação G3.5. Manipulando as fórmulas, podemos ver também que

$$y_0 \text{ minimiza em } C \text{ a função } \frac{1}{2}\|y\|^2 - \Re e(y, x_0)$$

$$\Re e \, (w - y_0, y_0) \geq \Re e \, (w - y_0, x_0), \quad \forall w \in C. \qquad ★$$

Definição G3.6. Seja H um espaço de Hilbert, $A \subseteq H$. Definimos o **ortogonal de A**

$$A^\perp = \{x \in H : (x, a) = 0, \quad \forall a \in A\} \ :$$

$A^\perp$ é sempre um subespaço vetorial fechado. ★

Teorema G3.7. *Se H é um espaço de Hilbert e M é um subespaço vet. fechado, então P_M é um operador linear com $\|P_M\| = 1$ (exceto no caso $M = \{0\}$) e é caracterizado por*

$$\boxed{P_M x_0 \in M \qquad e \qquad (x_0 - P_M x_0, w) = 0, \quad \forall w \in M,}$$

ou seja, $\boxed{x_0 - P_M x_0 \in M^\perp.}$ ◁

Definição G3.8. P_M é dita projeção ortogonal sobre M. ★

Teorema G3.9. *Seja H um espaço de Hilbert e M um subespaço fechado, então vale:*

- *$H = M \oplus M^\perp$; isto é, cada $x \in H$ pode ser expresso unicamente como $x = m + m'$ onde $m \in M$ e $m' \in M^\perp$;*
- *na decomposição acima, $m = P_M x$ e $m' = P_{M^\perp} x = (I - P_M)x$;*
- *$P_M = P_M^2$ e $P_M \circ P_{M^\perp} = P_{M^\perp} \circ P_M = 0$.* ◁

Exercícios

Exercício. Prove diretamente (usando o Teorema acima) a seguinte consequencia do Teorema de Hahn-Banach: Seja H um espaço de Hilbert, M um subespaço fechado e $\phi \in M^*$. Então existe $\widetilde{\phi} \in H^*$ tal que $\widetilde{\phi}|_M = \phi$ e $\left\|\widetilde{\phi}\right\| = \|\phi\|$

★

Teorema G3.10 [Teorema de Representação de Riesz-Frechet]. *Se $f \in H^*$, existe um único $y \in H$ tal que $f(x) = (x, y)$ para todo $x \in H$. Além disso, $\|y\|_H = \|f\|_{H^*}$* $\triangleleft$

Isto permite identificar H e H^*

Logo podemos também identificar H e H^{**} (reflexividade).

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.16, 5.17, 5.19 (p. 150..) do [Bre11] (leia primeiro o remark 3 na p.136). ★

Definição G3.11. Uma forma sesqui-linear[14] $a(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{K}$ é dita

- **contínua** se existe C tal que $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|, \quad \forall x,y \in H$,
- **coerciva** se existe $\alpha > 0$ tal que $\Re e\, a(x,x) \geq \alpha\|x\|^2, \quad \forall x \in H$,
- **sesquisimétrica** (ou hermitiana) se $a(x,y) = \overline{a(y,x)} \quad \forall x,y \in H$. ★

Lema G3.12. *Seja H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma sesqui-linear contínua e coerciva.*
Então existe $A \in L(H,H)$ tal que $a(w,z) = (w, Az)$.
A é um isomorfismo e $\alpha\,\|z\| \leq \|Az\| \leq C\,\|z\|$. ◁

Teorema G3.13 [Stampacchia]. *Nas condições do Lema G3.12, seja $C \neq \emptyset$ um convexo fechado. Dado $\varphi \in H^*$, existe um único $y_0 \in C$ tal que*

$$\Re e\, a(w - y_0, y_0) \geq \Re e\, \varphi(w - y_0), \quad \forall w \in C. \tag{G3.1}$$

Além disso, se a é sesqui-simétrica, y_0 é caracterizado por

$$\begin{cases} y_0 \in C \\ \dfrac{1}{2}\, a(y_0,y_0) - \Re e\, \varphi(y_0) = \min\limits_{y \in C} \left\{ \dfrac{1}{2}\, a(y,y) - \Re e\, \varphi(y) \right\}. \end{cases} \tag{G3.2}$$

◁

Corolário G3.14 [O Teorema de Lax-Milgram]. *Nas condições do Lema G3.12, para cada $\varphi \in H^*$, existe um único $y_0 \in H$ tal que*

$$a(w, y_0) = \varphi(w), \quad \forall w \in H.$$

Além disso, se a é sesqui-simétrica, então y_0 é caracterizada por:

$$\begin{cases} y_0 \in H \\ \dfrac{1}{2}\; a(y_0 . y_0) - \Re e\, \varphi(y_0) = \min\limits_{y \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}\; a(y,y) - \Re e\, \varphi(y) \right\}. \end{cases}$$

◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 5.20 (p. 151) do [Bre11] ★

[14] linear ma primeira entrada e linear no conjugado da segunda entrada

G4 Bases ortonormais

Definição G4.1. Um conjunto em H é dito **conjunto ortonormal** se os seus elementos são ortogonais a dois a dois e todos unitários. ★

Dada uma sequência $\{x_n\}$ l.i. podemos construir (processo de Gram-Schmidt) uma seq. ortonormal $\{e_n\}$ tal que $span(x_1, .., x_k) = span(e_1, .., e_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Teorema G4.2 [Desigualdade de Bessel]. *Se $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal em H, então para $x \in H$,*

$$\sum_{\alpha\in A} |\,(x, e_\alpha)\,|^2 \le \|x\|^2.$$

Em particular $\{\alpha \in A : (x, e_\alpha) \neq 0\}$ é enumerável. ◁

Teorema G4.3. *Se $S = \{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é um conjunto ortonormal em H, as seguintes afirmativas são equivalentes:*

a) (Completeza) *Se $(x, e_\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in A$, então $x = 0$.*

b) (Identidade de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\,(x, e_\alpha)\,|^2$ *para todo $x \in H$.*

c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{\alpha\in A} (x, e_\alpha)\, e_\alpha$, onde a soma converge independentemente da ordem dos termos. ◁

Definição G4.4. Um conjunto em H é dito **base de Hilbert** (ou base ortonormal) se é um conjunto ortonormal que satisfaz as propriedades equivalentes do Teorema G4.3 ★

Exercícios

Exercício. Mostre que

- um conjunto ortonormal é sempre linearmente independente,
- em dimensão finita, uma base de Hilbert é também uma base de Hamel
- uma base de Hilbert enumerável é também uma base de Schauder
- as propriedades (a-b-c) do Teorema G4.3 também equivalem a
  – $S^\perp = \{0\}$
  – não existe uma conjunto ortonormal que contenha propriamente S
  – $H = \overline{span(S)}$. ★

Proposição G4.5. *Todo espaço de Hilbert tem uma base ortonormal.* ◁

Teorema G4.6. *Um espaço de Hilbert H é separável se e somente se tem uma base ortonormal enumerável.*
Neste caso toda base ortonormal de H é enumerável e (se $\dim H = \infty$) H é isometricamente isomorfo a ℓ_2 ◁

G4.1 Outra formulação

Definição G4.7. Seja (E_n) uma sequência de subespaços fechados de H tal que
(a) são a dois a dois ortogonais;
(b) O espaço vetorial gerado por $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é denso em H .

Então dizemos que H é **soma de Hilbert dos espaços E_n** e escrevemos $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$. ★

Exemplo: se e_n é base de Hilbert, então H é soma de Hilbert dos espaços $\mathbb{K}e_n$.

Teorema G4.8. *Se $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ então*

a) (Completeza) *Se $P_{E_n}x = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $x = 0$.*

b) (Identidade de Parseval) $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|P_{E_n}x\|^2$ *para todo $x \in H$.*

c) Para cada $x \in H$, $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_{E_n}x$, onde a soma converge independentemente da ordem dos termos. ◁

Exercícios

Exercício. Faça os exercícios 5.26, 5.27 e 5.28 (p. 154) do [Bre11] ★

Exercício. Veja os sistemas descritos nos exercícios 5.31, 5.32 (base de Haar e sistema de Rademacher) (p. 155) do [Bre11] ★

Exemplo G4.9.
- A base canônica e_n em ℓ_2 é uma base de Hilbert.
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$ formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.
- As funções $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ $(n \in \mathbb{Z})$ formam uma base de Hilbert em $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

★

H1 Operadores compactos

Definição H1.1. Sejam E e F espaços de Banach e $T \in L(E, F)$.

- T é dito de posto finito se sua imagem tem dimensão finita.
- T é dito **compacto** se $T(\overline{B_E})$ é precompacto (na topologia forte).

> equivale (sendo em espaços métricos) a:
> se x_n é limitada entáo Tx_n possui uma subsequência convergente.

Denotamos por $K(E, F)$ e $L_f(E, F)$ os espaços dos operadores compactos (resp, de posto finito), de E em F.[15] ★

Proposição H1.2. *$K(E, F)$ é um subespaço vetorial fechado de $L(E, F)$.* ◁

Corolário H1.3. *Se $\{T_n\} \subseteq L_f(E, F)$ e $T \in L(E, F)$ são tais que $T_n \to T$ in $L(E, F)$, então $T \in K(E, F)$.* ◁

Proposição H1.4. *Se $T \in K(E, F)$ e F é um espaço de Hilbert, então existe uma sequência $\{T_n\} \subseteq L_f(E, F)$ tal que $T_n \to T$.* [a] ◁

[a] Mais em geral, a afirmação vale se F é de Banach e possui uma base de Schauder

Proposição H1.5. *(ex 6.7 do [Bre11]) Se $T \in L(E, F)$ então*

- *T compacto implica "$x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \to Tx$"*
- *se E é reflexivo e "$x_n \rightharpoonup x$ implica $Tx_n \to Tx$" então T é compacto*
- *T é de posto finito se e só se é contínuo de E_σ em F_τ.* ◁

Teorema H1.6. *$T \in K(E, F)$ se, e somente se, $T^* \in K(F^*, E^*)$.* ◁

[15] Escrevemos $K(E) = K(E, E)$.

Exercícios

Exercício. Mostre que $T \circ S$ é compacto sempre que T, S são lineares e contínuos e um deles é compacto ★

Exercício. Faça os exercícios 6.1, 6.2 (use o Teorema D1.10), 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 (use o sistema de Rademacher, ex 5.32) e 6.7(pontos 1,2,4) e 6.8 (p. 170...) do [Bre11]. ★

Exercício. Faça os exercícios 6.12 e 6.13 (p. 173...) do [Bre11]. ★

Exercício. Considere o operador $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : f \mapsto g(x) = \int_0^1 h(x,y)f(y)\,dy$ onde $h \in L^2([0,1]^2)$. Mostre que o operador é bem definido e compacto ★

Exemplo H1.7.

- $T : \ell_p \to \ell_p : (x_i) \mapsto (x_i/i)$ é compacto (veja ex 6.1 do [Bre11])
- $T : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1]) : f \mapsto \int_0^t f$ é compacto (veja ex 6.2 do [Bre11])
- se $V = \{x \in \ell_2 : \sum ix_i^2 < \infty\}$ com a norma $\|x\|_V^2 = \sum ix_i^2$ então $T : V \to \ell_2 : x \mapsto x$ é compacto (veja ex 6.5 do [Bre11]).
  Analogamente $T : \ell_2 \to W : x \mapsto x$ com $W = \{x \text{ seq.} : \sum x_i^2/i < \infty\}$ com a norma $\|x\|_W^2 = \sum x_i^2/i$

  Neste caso dizemos que $V \subseteq \ell_2 \subseteq W$ com inclusão compacta
- a inclusão de ℓ_p em ℓ_q $(p < q)$ não é compacta (apenas contínua)
- a inclusão de $L^p(0,1)$ em $L^q(0,1)$ $(p > q)$ não é compacta (apenas contínua). (veja ex 6.6 do [Bre11]).

★

H2 A Teoria de Riesz-Fredhohm

Lembrete

- Se $T \in L(E,F)$ (espaços de Banach) então (veja seção C3)
  - $N(T^*) = R(T)^\perp, \qquad N(T^*)^{\perp\!\!\!\!*} = \overline{R(T)}$
  - $N(T) = R(T^*)^{\perp\!\!\!\!*}, \qquad N(T)^\perp \supseteq \overline{R(T^*)}$
  - são equivalentes:

    i) $R(T)$ é fechada

    ii) $R(T^*)$ é fechada
- Em um esp. de Banach E (veja seção B7)
  um subespaço M de dimensão finita (ou fechado e de codimensão finita) sempre possue um complemento topológico N. Logo para todo $z \in E$, existem únicos $x \in M$, $y \in N$ tais que $z = x + y$, além disso, $z \mapsto (x, y)$ é linear e contínua.

Teorema H2.1 [Alternativa de Fredholm]. *Se E é um espaço de Banach e $T \in K(E)$, então*

a) $\dim(N(I - T)) < \infty$,

b) *$R(I - T)$ é fechada e portanto $R(I - T) = N(I - T^*)^\perp$,*

c) *Se $N(I - T) = \{0\}$ se, e somente se, $R(I - T) = E$,*

d) $\dim(N(I - T)) = \dim(N(I - T^*)) = n$.

$\triangleleft$

A "Alternativa" seria entre (mutuamente exclusivas)

(1) $I - T$ é sobre, ou seja, a equação $(I - T)x = y$ tem solução para todo $y \in E$

(2) $I - T$ não é injetora, ou seja, a equação $(I - T)x = 0$ tem solução não trivial

Além disso, no caso (1) a solução é única, no caso (2) y pertence a imagem se satisfaz n condições lineares.

Lema H2.2. *Seja E um espaço de Banach, $G \subseteq E^*$ subespaço de dimensão finita n, então $G^\perp$ possui complemento topológico de dimensão n.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício (EH1)**.** Considere o operador compacto $K : \ell_p \to \ell_p : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$ com $\lambda_i \to 0$
Verifique que ele satisfaz todas as afirmações do Teorema (encontre $N(I-T)$, $R(I-T)$ e explicite suas dimensões)
Faça o mesmo com os dois operadores (compactos?) obtidos compondo K com o operador de translação a direita e a esquerda, respectivamente. ★

Exercício (EH2)**.** Considere o operador compacto do exercício (6.2-3) do [Bre11]: encontre $N(I-T)$ e $R(I-T)$. ★

H3 Espectro de Um Operador

Definição H3.1. Seja E um espaço de Banach e $T : D(T) \subset E \to E$ um operador linear fechado.

- o **resolvente** de T é o conjunto

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T) : D(T) \to E \text{ é bijetora } \}$$

  – Se $\lambda \in \rho(T)$ o operador $(\lambda I - T)^{-1}$ é contínuo e é dito *operador resolvente de T em λ*.

- o **espectro** de T é o conjunto $\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$.

  O espectro divide-se em:

  a) O **espetro pontual** $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ N(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$ [a]
  Se $\lambda \in \sigma_p(T)$,
     * λ é dito **autovalor de T**,
     * $N(\lambda I - T)$ é dito **autoespaço de T** (correspondente a λ)
     * $x \in N(\lambda I - T) \setminus \{0\}$ é dito **autovetor de T** (correspondente a λ)

  b) O **espectro contínuo**
  $\sigma_c(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C}\colon N(\lambda I - T) = \{0\},\ R(\lambda I - T) \neq \overline{R(\lambda I - T)} = E\Big\}$

  c) O **espetro residual**
  $\sigma_r(T) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ N(\lambda I - T) = \{0\}, \overline{R(\lambda I - T)} \neq E\Big\}$ ★

[a] [Bre11] denota σ_p por EV (eigenvalues).

Proposição H3.2. *$\rho(T)$ é aberto e $\sigma(T)$ é fechado, em $\mathbb{C}$.*
Em particular, se $T \in L(E, E)$, então $\sigma(T)$ é compacto e

$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}. \quad \triangleleft$$

Proposição H3.3. *Se $x \in N(\lambda I - T)$ e $\phi \in N(\mu I - T^*)$ com $\lambda \neq \mu$ então $\langle \phi, x\rangle = 0$.*
Ou seja, $N(\lambda I - T) \subseteq N(\mu I - T^*)^{\perp}$ e $N(\lambda I - T^*) \subseteq N(\mu I - T)^{\perp}$. $\triangleleft$

Exemplo H3.4. Considere os operadores em ℓ_2
$S_r : (x_1, x_2, x_3..) \mapsto (0, x_1, x_2, ..)$
$S_l : (x_1, x_2, x_3..) \mapsto (x_2, x_3, x_4, ..)$
$T : (x_i) \mapsto (x_i/i)$
mostre que 0 pertence, respectivamente, a $\sigma_r,\ \sigma_p,\ \sigma_c$. ★

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.14 (p. 174) do [Bre11]
Mostre que se $0 \in \rho(T)$ então $\sigma(T^{-1}) = 1/\sigma(T)$. ★

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.17, 6.18(exceto ponto 11) e 6.19 (p. 175...) do [Bre11]

★

H3.1 Espectro do operador compacto

Teorema H3.5. *Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita e $T \in K(E)$, então*

a) $0 \in \sigma(T)$,

b) $\sigma(T)\backslash\{0\} = \sigma_p(T)\backslash\{0\}$,

c) $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *pode ser*

1. $\emptyset$,
2. *finito,*
3. *uma sequência que tende a* 0.

d) os autoespaços correspondentes a autovalores não nulos são finitodimensionais

Em particular, se a sequência $\{\lambda_n\} \subseteq \sigma(T)\backslash\{0\}$ *converge e é injetora então converge a zero, isto é, todo ponto de* $\sigma(T)\backslash\{0\}$ *é isolado.* $\triangleleft$

Exercícios

Exercício. Construa um exemplo de operador compacto não nulo com, respectivamente, 0, um numero finito e um numero infinito de autovalores. Construa um exemplo de operador compacto com, respectivamente, $0 \in \sigma_p$, $0 \in \sigma_c$, $0 \in \sigma_r$.
(Use sequências). ★

H3.2 Operadores auto-adjuntos e seu espectro

Definição H3.6. Sejam H um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$. Assim o adjunto $T^* \in L(H^*)$.
Seja $R : H \to H^*$ é o operador de Riesz, definido como $\langle Ry, x\rangle = (x, y)$.
Então definimos o **adjunto (Hilbertiano)** de T:

$$\overset{*}{T}: H \to H : x \mapsto R^{-1}T^*Rx \ :$$

assim $\overset{*}{T} \in L(H)$ e vale $\boxed{(\overset{*}{T}\, y, x) = (y, Tx) \quad \forall x, y \in H\,.}$ ★

Definição H3.7. $T \in L(H)$ é **auto-adjunto** se $\overset{*}{T} = T$; isto é,

$$(Ty, x) = (y, Tx), \quad \forall x, y \in H.$$

Vale então $(Tx, x) \in \mathbb{R}$. ★

Definimos a **imagem numérica de T**:

$$W(T) = \{(Tx, x) : \ x \in S_H\}\,.$$

Teorema H3.8. *(1) Seja $T \in L(H)$. Então, $\sigma(T) \subseteq \overline{W(T)}$.*

(2) Se T é também auto-adjunto, então $W(T) \subseteq [m_T, M_T] \subseteq \mathbb{R}$, onde $m_T = \inf W(T)$, $M_T = \sup W(T)$. Além disso,

- $m_T, M_T \in \sigma(T)$,
- $\|T\| = \max\{-m_T, M_T\}$,
- *autovetores correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.*
- $H = N(\lambda I - T) \oplus \overline{R(\lambda I - T)}$, *logo* $\sigma_r(T) = \emptyset$ *[Fri70, p.218]*

◁

Corolário H3.9. *Seja $T \in L(H)$ auto adjunto tal que $\sigma(T) = \{0\}$. Então $T = 0$.* ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 6.24(pontos 1 e 2) (p. 178) do [Bre11] ★

H4 Decomposição Espectral de Operadores Compactos e Auto-Adjuntos

Teorema H4.1. *Sejam H um espaço de Hilbert separável e $T \in L(H)$ um operador compacto e auto adjunto. Então H admite uma base Hilbertiana formada por auto-vetores de T.*
Em particular, se $\{e_j\}$ é esta base, $T\left(\sum a_i e_i\right) = \sum \lambda_i a_i e_i$. ◁

Observação H4.2. O operador do ex 6.1 do [Bre11]:

$$T : \ell_2 \to \ell_2 : (x_i) \mapsto (\lambda_i x_i)$$

com $\lambda_i \to 0$ é o protótipo de todos os operadores compactos e autoadjuntos em espaços de Hilbert separáveis (de dimensão infinita).

Em dimensão finita, isso é o análogo do resultado que toda matriz hermitiana é diagonalizável.

Truncando a série, obtemos uma outra forma de aproximar T por $\{T_n\} \subseteq L_f(H)$. ★

Exercícios

Exercício (EH3). Considere o operador

$$T : L^2[0,\pi] \to L^2[0,\pi] : f \mapsto g(x) = \int_0^\pi h(x,y) f(y)\, dy$$

onde $h \in L^2([0,\pi]^2)$ (já vimos que é bem definido e compacto).
• Verifique que T é autoadjunto se $h(x,y) = \overline{h(y,x)}$.

Se $k(x,y) = \frac{1}{\pi} min\{x(\pi - y), y(\pi - x)\}$ então $g = Tf$ satisfaz (qtp) o problema

$$\begin{cases} -g'' = f & em\ (0,\pi)\,, \\ g(0) = g(\pi)\,. \end{cases}$$

Sabendo isso, encontre uma base de Hilbert para $L^2[0,\pi]$ feita de autovetores de T.
Note que $Tf = \lambda f$ implica (se $\lambda \neq 0$)

$$\begin{cases} -f'' = -\,(Tf)''/\lambda = \frac{1}{\lambda} f & em\ (0,\pi)\,, \\ f(0) = f(\pi)\,. \quad ★ \end{cases}$$

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

[Car] A. Carvalho. "SMA5826 Analise I". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* ().

[Car07] A. Carvalho. "Notas A.N.C Analise II (2007)". Em: *Notas de aula - ICMC - USP* (2007).

[Che01] W. Cheney. *Analysis for applied mathematics.* Vol. 208. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, pp. viii+444. ISBN: 0-387-95279-9. DOI: 10.1007/978-1-4757-3559-8.

[de 89] D. G. de Figueiredo. *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours.* Vol. 81. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989, pp. vi+96. ISBN: 3-540-51179-2.

[Fol99] G. B. Folland. *Real analysis.* Second. Pure and Applied Mathematics (New York). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999, pp. xvi+386. ISBN: 0-471-31716-0.

[Fri70] A. Friedman. *Foundations of modern analysis.* Holt, Rinehart e Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1970, pp. vi+250.

[Muj] J. Mujica. "Notas de análise funcional". Em: *Notas de aula - IMECC - UNICAMP* ().

[Rud73] W. Rudin. *Functional analysis.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973, pp. xiii+397.

[TL80] A. E. Taylor e D. C. Lay. *Introduction to functional analysis.* Second. John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane, 1980, pp. xi+467. ISBN: 0-471-84646-5.

Conteúdo

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios

Z1 Teoremas para saber provar - P1

Teorema A3.1 – Contração

Teorema A4.1 – das categorias de Baire

Teorema A5.2 – (absoluta convergência)

Proposição A7.1 – (continuidade linear)

Proposição A7.2 – (completeza espaço L)

Teorema A7.7 – Riesz (com seu lema)

Teorema B2.1 – Hahn-Banach real

Teorema B2.4 – Existem muitos funcionais

Proposição B2.5 – (dual separável)

Teorema B5.2 – Da aplicação aberta

Teorema B5.4 – Do gráfico fechado

Teorema B5.5 – Da Limitação Uniforme - Banach-Steinhaus

Teorema C2.3 – (adjunto)

Proposição C3.2 – (ortogonalidade gráficos)

Proposição D1.9 – (conv. fraca)

Teorema D1.11 – Mazur (convexos fechados)

Teorema D3.1 – Banach-Alaoglu (Assumindo Tychonoff)

Proposição E1.1 – (reflexividade E^*)

Teorema E1.7 – Kakutani (assumindo Goldstine)

Teorema E2.1 – (metrizabilidade bola)

Teorema E2.5 – (subseq. fracam. conv.)

Z2 Teoremas para saber provar - P2

Teorema F3.5 – Fischer-Riesz
Proposição F3.6 – "Reciproca" da conv. dominada
Teorema F4.8 – de Representação de Riesz (caso $1 < p < \infty$)
Proposição F5.4 – densidade C_c
Teorema F9.2 – Fréchet-Kolmogorov

Prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz da identidade do paralelogramo e do Teorema de Pitágoras
Lema G3.1 – Proposição G3.3 – Projeção sobre convexos
Teorema G3.9 – Decomposição em sub. ortogonais
Corolário G3.14 – O Teorema de Lax-Milgram
Teorema G4.3 – Base de Hilbert

Proposição H1.2 – Corolário H1.3 – Proposição H1.4 – op. compactos
Proposição H3.2 – propriedades básicas espectro
Teorema H3.5 – espectro do op. compacto
Teorema H3.8 – espectro do op. compacto autoadjunto
Teorema H4.1 – base de autovetores