E1 Reflexividade

Proposição E1.1. *Se E é um espaço (de Banach) reflexivo, então E^* é reflexivo.* $\triangleleft$

Proposição E1.2. *Se E é um espaço (de Banach) reflexivo, todo seu subespaço fechado é reflexivo.* $\triangleleft$

Lema E1.3. *Se E e F são espaços de Banach isomorfos, então E é reflexivo se e só se F é reflexivo.* $\triangleleft$

Proposição E1.4. *Se E é um espaço de Banach e E^* é reflexivo, então E é reflexivo.* $\triangleleft$

Teorema E1.5. *Se E é um espaço de Banach, então E é reflexivo se, e somente se, E^* é reflexivo.* $\triangleleft$

Lembrete

- Se E é um espaço métrico separável e $\emptyset \neq F \subset E$, então F é separável.
- Se E é um e.v.n. e E^* é separável então E também é separável.
- A reciproca não é verdadeira

Teorema E1.6. *Se E é um espaço de Banach, então E é reflexivo e separável, se e somente se, E^* é reflexivo e separável.* $\triangleleft$

Teorema E1.7 [Kakutani]. *Seja E um e.v.n.*
E é reflexivo se, e somente se, $\overline{B_E}$ é compacta na topolgia fraca. $\triangleleft$

Lema E1.8. *Seja E um e.v.n. $J : E_\sigma \to E^{**}_{\sigma^*}$ é contínua e (quando existe) sua inversa é contínua.* $\triangleleft$

Lema E1.9 [Lema (Goldstine]). *Seja E um e.v.n. Então $J(\overline{B_E})$ é denso em $\overline{B_{E^{**}}}$ com a topologia $\sigma^* = \sigma(E^{**}, E^*)$.*
Também $J(E)$ é denso em E^{**} com a mesma topologia. $\triangleleft$

Lema E1.10 [Lema (Helly]). *Seja E um e.v.n, $(f_1, \ldots, f_n) \in (E^*)^n$, $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ e*

$$\boldsymbol{T} : E \to \mathbb{K}^n : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))\,;$$

então, são equivalentes

i) *Para todo $\epsilon > 0$ existe $x_\epsilon \in \overline{B_E}$ tal que*

$$\|\boldsymbol{T}(x_\epsilon) - \boldsymbol{\alpha}\|_\infty < \epsilon,$$

ii) *Para todo $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{K}^n$,*

$$|\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}| \;\leq\; \|\,\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{T}\,\|_{E^*}\,.$$

$\triangleleft$

Juntando resultados obtidos, temos esta importante conseqência:

Corolário E1.11. *Seja E é um espaço de Banach reflexivo. Se $K \subseteq E$ é fechado, limitado e convexo, então K é compacto na topologia fraca.* $\triangleleft$

E2 Separabilidade e metrização da bola

Teorema E2.1. *Seja E um e.v.n. Então E é separável, se e somente se, $(\overline{B_{E^*}}, \sigma(E^*, E))$ é metrizável.*
Uma métrica é

$$d_{\sigma^*}(\phi, \psi) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\phi(x_n) - \psi(x_n)|$$

onde $\{x_n\}$ é denso em $\overline{B^E}$.

◁

Teorema E2.2. *Seja E um e.v.n. Então E^* é separável, se e somente se, $(\overline{B_E}, \sigma(E, E^*))$ é metrizável.*
Uma métrica é

$$d_{\sigma}(x, y) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|$$

onde $\{f_n\}$ é denso em $\overline{B^{E^*}}$. ◁

Exercícios

Exercício. Faça a prova do Teorema E2.2 imitando a do Teorema E2.1 e usando o exercício 3.24 (p. 85...) do [Bre11]. ★

Corolário E2.3. *Nas hipóteses do Teorema E2.1 (resp. E2.2) para limitados de E^* (resp. de E), compacidade e compacidade sequêncial são equivalentes.* ◁

Temos então

Corolário E2.4. *Se E é um e.v.n. separável e $\{f_n\}$ é uma sequência limitada de E^*, então existe subsequência $\{f_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(E^*, E)$ (conv. fraca*).* ◁

Teorema E2.5. *Seja E um espaço (de Banach) reflexivo e $\{x_n\}$ uma sequência limitada em E. Então existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ que converge em $\sigma(E, E^*)$ (conv. fraca).* ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 3.16 (p. 83) do [Bre11] ★

Exercício. Faça os exercícios 3.17 e 3.18 (p. 83) do [Bre11] ★

Exercício. Faça o exercício 3.22 (p. 84) do [Bre11] ★

Exercício. Faça o exercício 3.25 (p. 85) do [Bre11] ★

E3 Espaços uniformemente convexos

Definição E3.1. Um e.v.n E é dito **uniformemente convexo** se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in \overline{B_E}, \quad \text{e} \quad \|x - y\| \geq \epsilon \;\Rightarrow\; \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta. \tag{E3.1}$$

★

Exemplo E3.2.

- Veremos que espaços com produto interno são u.c.
- Considere $\mathbb{R}^2$ com as normas $\| \|_p$: é fácil ver que é u.c. se $p \in (1, \infty)$, mas não é u.c. se $p = 1$ ou $p = \infty$. ★

Teorema E3.3 [Milman-Pettis]. *Todo espaço de Banach uniformemente convexo é reflexivo.* ◁

Corolário E3.4. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.* ◁

Proposição E3.5. *Seja E uniformemente convexo e $\{x_n\}$ uma sequência em E tal que $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$.

Em particular, convergência fraca mais convergência da norma implica convergência forte. ◁

Exercícios

Exercício. Faça o exercício 3.32 (apenas pontos 1 e 2) (p. 87) do [Bre11] ★

E3.1 Aplicação

Definição E3.6. Uma função $\Phi : E \to (-\infty, +\infty]$ é dita

- semicontínua inferiormente (l.s.c.) se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $[\Phi \leq \lambda] = \{x \in E : \; \Phi(x) \leq \lambda\}$ é fechado.
- convexa se o conjunto $\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} : \; y \geq \Phi(x)\}$ é convexo; equivalentemente, $\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$: $x, y \in E$, $t \in (0, 1)$. ★

Corolário E3.7 [do Teorema D1.11]. *Se Φ é convexa e semicontínua inferiormente (ou contínua) na topologia τ, então é semicontínua inferiormente na topologia $\sigma(E, E^*)$.*

Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$, então[1]

$$\Phi(x) \leq \liminf \Phi(x_n). \qquad \lhd$$

Corolário E3.8 [do Corolário E1.11]. *Seja E um espaço de Banach reflexivo, $\emptyset \neq A \subseteq E$ um convexo fechado. Seja $\Phi : A \to (-\infty, \infty]$ convexa, própria ($\Phi \not\equiv +\infty$), semicontínua inferiormente e, se A é ilimitado,*

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \Phi(x) = +\infty. \tag{E3.2}$$

Então Φ alcança seu mínimo em A; isto é, existe $x_0 \in A$ tal que

$$\Phi(x_0) = \min_{x \in A} \Phi(x). \qquad \lhd$$

[1]Lembre que a definição de fechado por seq. não implica na topológica, mas a topológica implica na por seq, ou seja, se F é fechado e $x_n \to x$ com $\{x_n\} \subset F$ então $x \in F$

E4 Mais exercícios

Exercícios

Exercício. Preencha a seguinte tabela com S (para sim) e N (para não).

	Banach	Separáv.	Reflex.	Unif. Conv.
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$				
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$				
$(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_1)$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$				
$(c_{00}, \|\cdot\|_p)$, $1 < p < \infty$				
$(c_0, \|\cdot\|_\infty)$				
$(c, \|\cdot\|_\infty)$				
ℓ_1				
ℓ_∞				

★

Referências

[Bre11] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Universitext. Springer, New York, 2011, pp. xiv+599. ISBN: 978-0-387-70913-0.

Lista dos teoremas

Lista dos exercícios