2ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Funções e suas propriedades.

Exercício 1 Dê o domínio natural das funções
a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x}$; **b)** $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x}{x+3}}$; **c)** $f(x) = \sqrt{x(2-3x)}$; **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x-1}}$;
e) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{5-2x}$; **f)** $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$; **g!)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\pi x^2 - (1+\pi^2)x + \pi}}{-2x^2 + 3\pi x}\right)$.

Exercício 2 **(!)** Dê o conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+3)x + (m^2+2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real.

Exercício 3 Considere a função dada por $f(x) = x^2 + 4x + 5$.
a) Mostre que $f(x) = (x+2)^2 + 1$
b) Esboce o gráfico de f
c) Qual o menor valor de $f(x)$? Para qual x este menor valor é atingido?

Definição 1 Se $x \in \mathbb{R}$, então $[[x]]$ denota a "parte inteira" de x, isto é,

$$\boxed{[[x]] = \max\{n \in \mathbb{Z};\, n \le x\}.}$$

Assim, por exemplo: $[[2.768]] = 2$, $[[4/3]] = 1$, $[[-4/3]] = -2$

Exercício 4 Verifique se cada função abaixo é par, ímpar, injetora ou sobrejetora. Se puder, esboce o gráfico e DEPOIS confira o resultado com o auxílio do computador.
a) $f(x) = [[x]]$ **b)** $f(x) = \dfrac{|2x+1|}{2x+1}$ **c)** $f(x) = \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ **d!)** $f(x) = x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$
e) $f(x) = x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$ **f)** $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ **g)** $f(x) = -\sqrt{1-x}$ **g)** $f(x) = |x+2| + |2x-1|$.

Exercício 5 Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, defina as funções $f+g$, $f-g$, $f.g$, f/g e g/f e determine o domínio da função resultante:

$(a)\ f(x) = x - 5;\ g(x) = x^2 - 1$ $(b)\ f(x) = \sqrt{x};\ g(x) = x^2 + 1$

Exercício 6 Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, defina as funções compostas $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ e $g \circ g$ e determine o domínio da função resultante:

$(a)\ f(x) = x - 2;\ g(x) = x + 7$ $(b)\ f(x) = \sqrt{x-2};\ g(x) = x^2 - 2$
$(c)\ f(x) = x - 2;\ g(x) = \dfrac{1}{x+7}$

Exercício 7 Esboce o gráfico das funções abaixo determinando seu domínio e (quando possível) sua imagem. Feito isso, diga se são limitadas (superiormente ou inferiormente) e se possuem máximos ou mínimos (globais).

$(a)\, f(x) = 3x - 1$ $\quad (b)\, f(x) = x^2 - 1$ $\quad (c)\, f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$

$(d)\, f(x) = 4 - |x|$ $\quad (e)\, f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & se\ x \neq 2 \\ 0 & se\ x = 2 \end{cases}$ $\quad (f)\, f(x) = \begin{cases} -2 & se\ x \leq 3 \\ 2 & se\ x > 3 \end{cases}$

$(g)\, f(x) = \sqrt{4 - 2x}$ $\quad (h)\, f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x < 3 \\ 2x - 1 & se\ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad (i)\, f(x) = \begin{cases} x - 2 & se\ x < 0 \\ 0 & se\ x = 0 \\ x^2 + 1 & se\ x > 0 \end{cases}$

$(j)\, f(x) = cos(4x)$ $\quad (k)\, f(x) = 3tg(x)$ $\quad (l)\, f(x) = -4sen(x)$

$(m)\, f(x) = 3^{2x}$ $\quad (n)\, f(x) = \ln(\frac{x}{2} + 1)$ $\quad (o)\, f(x) = \sinh(x) + \cosh(x)$

$(p)\, f(x) = |\ln(|x|)|$ $\quad (q)\, f(x) = \begin{cases} e^{-x} & se\ x < -1 \\ \frac{1}{e} & se\ x \in [-1, 1] \\ e^x & se\ x > 1 \end{cases}$ $\quad (r)\, f(x) = \begin{cases} \sinh(x) + 1 & se\ x < 0 \\ \cosh(x - 1) & se\ x \geq 0 \end{cases}$

Exercício 8 (*) Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da qual conhece o gráfico, como será o gráfico das seguintes funções?

$(a)\, f(3x)$ $\quad (b)\, f(x + 3)$ $\quad (c)\, 3f(x)$ $\quad (d)\, f(x) + 3$

$(e)\, f(x/3)$ $\quad (f)\, f(x - 3)$ $\quad (g)\, f(x)/3$ $\quad (h)\, f(x) - 3$

$(i)\, f(2x - 1)$ $\quad (l)\, f(2(x - 1))$ $\quad (m)\, 5f(2x - 1) + 3$ $\quad (n)\, 5(f(2x - 1) + 3)$

Exercício 9 (prova 2006) Determine o domínio natural e a imagem da função dada, esboçe o gráfico e verifique se a função é limitada, par, ímpar, injetora ou sobrejetora. Justifique suas respostas provando ou dando contra-exemplos.

(a) $f(x) = |2x - 1| - |2 - x|$ (b!) $f(x) = x^3 \sin(x) + 2$

Exercício 10 (*) O produto de duas funções pares $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par? O que dizer do produto de duas funções ímpares? E do produto de uma função par por uma ímpar?

Exercício 11 (*) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são ambas pares, verifique que $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções pares. Mostre também que, se f e g são ambas ímpares, então $f \circ g$ e $g \circ f$ são ímpares. O que se pode dizer das composições $f \circ g$ e $g \circ f$ se f for par e g for ímpar?

Exercício 12 (!) Prove que a função $g(x) = \ln[\text{sen}x + \sqrt{1 + \text{sen}^2 x}]$ é ímpar.
(sugestão: como deve ser $f(x)$ para que $\ln(f(x))$ seja ímpar?)

Exercício 13 Considere a função $f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|$:
a) determine o domínio natural;
b) restrinja (se for necessário) domínio e contradomínio, para obter uma nova função (definida pela mesma lei) que seja invertível;
c) calule a inversa da função obtida no ponto b).

Exercício 14 Seja ABCD um quadrado de lado ℓ. Sabendo-se que K é a soma dos quadrados das distâncias de um ponto P do plano definido por ABCD aos vértices de ABCD, determine:
a) O valor mínimo de K e a posição na qual ocorre este mínimo;
b) O lugar geométrico do ponto P para $K = 4\ell^2$.

Gabarito

Exercício 1: **a)** $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\}$; **b)** $\{x \in \mathbb{R} : x < -3 \text{ ou } x \geq 0\}$; **c)** $\left[0, \dfrac{2}{3}\right]$; **d)** $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$; **e)** $\left[0, \dfrac{5}{2}\right]$; **f)** $\{0\} \cup [1, +\infty[$; **g)** $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \setminus \{-1, 1\}$; **h)** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \dfrac{1}{\pi} \text{ ou } \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

Exercício 4 c) ímpar; d) par e sobrejetora; f) ímpar e injetora; g) injetora

Exercício 6:

b) $(g \circ f)(x) = x - 4$ com domínio $[2, +\infty)$

c) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x+5}$ com domínio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -5\}$

$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+7} - 2$ com domínio $\{x \in \mathbb{R} : x \neq -7\}$

Exercício 2 $\left]-\infty, -\dfrac{1}{12}\right[$.

Exercício 14 (a) $K_{min} = 2\ell^2$ (b) Circunferência com centro no centro de ABCD e raio $R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.