4ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Limites 2

Exercício 1 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $-x^2 + 3x \leq f(x) < \dfrac{x^2-1}{x-1}$, $\forall\, x \neq 1$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ e justifique.

Exercício 2 Suponha que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|g(x)| \leq x^4$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x)}{x}$.

Exercício 3 (!) Sejam $f\,, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $[g(x)]^4 + [f(x)]^4 = 4\,,\quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Calcule e justifique:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^5 g(x)$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\sqrt{x^3-27}$.

Exercício 4 (!) Sejam a, b, $c \in \mathbb{R}$ e suponha que $|ax^2 + bx + c| \leq |x|^3$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Prove que devemos ter $a = b = c = 0$ necessariamente.

Exercício 5 Mostre e verifique graficamente que
(a) Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. **(b)** Existe $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0$.

Exercício 6 (*) Seja $f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.
Calcule (se possível) e justifique os resultados:
a) $\lim_{x\to 0} f(x\sin(x))$; b) $\lim_{x\to 0} f\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$; c) $\lim_{x\to 0} f(\,[[\,|x|\,]]\,)$.
Comente os resultados.

Exercício 7 Dê um exemplo de uma função f de maneira que $\lim\limits_{x\to p} |f(x)|$ exista, mas $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ não exista.

Exercício 8 Encontre exemplos de funções $f, g : I \to \mathbb{R}$, onde $x_o \in I$, e I é um intervalo, tais que:

a) a função $f + g$ é contínua em x_o mas as funções f e g não são contínuas em x_0.

b) a função $f \circ g$ é contínua em x_o mas a função g é descontínua em x_o e a função f é descontínua em $g(x_o)$.

c) a função f é contínua em $g(x_o)$, a função g não é contínua em x_o mas a função $f \circ g$ é contínua em x_o.

Exercício 9 Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **(e)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

Exercício 10 Considere a função $h(x) = \begin{cases} x, & x \geq 3 \\ \dfrac{x^2}{3}, & x < 3. \end{cases}$. Calcule:

(a) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$ **(c)** $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{h(x)-h(3)}{x-3}$

Exercício 11 É falsa ou verdadeira a seguinte afirmação

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } p$$

Justifique.

Exercícios sobre as propriedades das funções contínuas

Exercício 12 Seja $f(x) = x^5 + x + 1$. Mostre que f admite pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

Exercício 13 Mostre que a equação $x^3 - \dfrac{1}{1+x^4} = 0$ admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 14 (!) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{1 + x^2}$.

(a) Prove que o valor máximo de f é $f(1)$.

(b) Mostre que existe $x_1 \in]-1, 0[$ onde $f(x_1)$ é o valor mínimo de f.

Exercício 15 Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, onde I é um intervalo qualquer. Então mostre que a imagem de f é um intervalo.

Exercício 16 Seja $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua com $f(a) < f(b)$. Suponha que

$$\forall\, s, t \in [a, b],\ s \neq t \implies f(s) \neq f(t).$$

Prove que f é estritamente crescente (i.e., $\forall\, s, t \in [a, b]$, $s < t \Longrightarrow f(s) < f(t)$).

Exercício 17 (!) Seja f uma função definida por

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}\,.$$

(a) Determine o domínio de f.

(b) Verifique que f é contínua em $[0, +\infty[$.

(c) Mostre que a única raiz de f em $]0, +\infty[$ é o número real 1, e que $f(2) > 0$ e $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$.

(d) Verifique ainda que $f(x) > 0$ em $]1, +\infty[$ e que $f(x) < 0$ em $]0, 1[$.

Exercício 18 (!) Suponha que $f : [0,\ 1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é racional para todo x em $[0,\ 1]$. Prove que $f(x) = 1$, para todo x em $[0,\ 1]$.

Exercício 19 (!) Seja $f : [0,\ 1] \to [0,\ 1]$ uma função contínua. Mostre que existe $x_0 \in [0,\ 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Gabarito

Exercício 1 2 **Exercício 2** 0 **Exercício 3** (a) 0 (b) 0 **Exercício 6** a) 1; b) $\nexists$; c) 3

Exercício 9: **(a)** 1 **(b)** -1 **(c)** não existe **(d)** 1 **(e)** 0

Exercício 10: **(a)** 2 **(b)** 1 **(c)** não existe

Exercício 11: É falsa.