6ª Lista de Exercícios de SMA-301 Cálculo 1

Eugenio Massa

Derivadas 1

1. Calcule $f'(p)$, pela definição, para as f e os p a seguir:
   (a) $f(x) = x^2 + x$ e $p = 1$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 1$ (c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $p = 2$
   (d) $f(x) = 2x^3 - x^2$ e $p = 1$

2. Determine a equação da reta tangente em $(p, f(p))$, para as f e os p a seguir:
   (a) $f(x) = x^2$ e $p = 2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $p = 2$ (c) $f(x) = \sqrt{x}$ e $p = 9$
   (d) $f(x) = x^2 - x$ e $p = 1$
   Esboce os gráficos, em cada caso acima, de f e da reta tangente.

3. **(*)** Calcule $f'(x)$ pela definição:
   (a) $f(x) = e^x$ (b) $f(x) = \ln(x)$ (c) $f(x) = \sin(x)$ (d) $f(x) = \cos(x)$ (e) $f(x) = x$
   (f) $f(x) = x^2 + x$ (g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (h) $f(x) = 3x - 1$ (i) $f(x) = 7$ (l) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

4. **(*)** Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Encontre $f'(p)$ para $p \neq 0$ e mostre que $f'(0)$ não existe.

5. Dê exemplo, por meio de um gráfico, de uma função f, definida e derivável em $\mathbb{R}$, tal que:
   (a) $f'(1) = 0$
   (b) $f'(x) > 0$ para todo x
   (c) $f'(0) < f'(1)$
   (d) $f'(x) > 0$ para $x < 1$ e $f'(x) < 0$ para $x > 1$
   (e) $f'(x) > 0$ para $x < 0$, $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ e $f'(x) > 0$ para $x > 2$
   (f) $f'(0) = f'(1) = 0$
   (g) $f'(1)$ não exista.

6. Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{se} \quad x < 1 \\ 2x + 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$
   (a) Mostre que f é derivável em $p = 1$ e calcule $f'(1)$
   (b) Esboce o gráfico de f.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$
   (a) Esboce o gráfico de f
   (b) f é derivável em $p = 0$? Em caso afirmativo, calcule $f'(0)$.

8. Para que valores de x a função $f(x) = x|x|$ é derivável? Encontre uma fórmula para f'.

9. Verifique se as funções abaixo são deriváveis em $p = 0$.

   $(a)\, f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen} \dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ $(b)\, f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x^2 + 2x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$ $(c)\, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

    Determine $f'(0)$, se existir.

11. Em cada item abaixo

    (i) Esboce o gráfico (excetuado ponto f)

    (ii) Determine se f é contínua em x_1 dado

    (iii) Determine se f é derivável em x_1 dado

$$(a)\, g(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \leq 0 \\ -x^2 & se\ x > 0 \end{cases} ;\ x_1 = 0 \qquad (b)\, h(x) = \begin{cases} x-2 & se\ x < 0 \\ x^2 & se\ x \geq 0 \end{cases} ;\ x_1 = 0$$

$$(c)\, f(x) = |x-3|;\ x_1 = 3 \qquad (d)\, g(x) = \begin{cases} x+x^2 & se\ x > -1 \\ 0 & se\ x \leq -1 \end{cases} ;\ x_1 = -1$$

$$(e)\, h(x) = \sqrt[3]{x};\ x_1 = 0 \qquad (f)\, f(x) = \sqrt[4]{x^2+2};\ x_1 = 0$$

12. Calcule $f'(x)$, sabendo que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$|f(x) - f(t)| \leq |x-t|^2 \qquad \forall\, x, t \in \mathbb{R}.$$

13. Sejam f, g funções definidas em $\mathbb{R}$, com g contínua em 0 e tais que

$$f(x) = xg(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

    Mostre que f é derivável em 0.

14. Calcule $f'(x)$ sendo f dada por
    (a) $f(x) = x^{100}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$ (c) $f(x) = x^{-3}$ (d) $f(x) = \sqrt[9]{x}$ (e) $f(x) = \sqrt[6]{x}$

15. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos de f e da reta tangente.

16. Determine a equação da reta tangente a $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto de abscissa 1. Esboce os gráficos.

17. Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa p. Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

18. Determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

19. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \ln x$ no ponto de abscissa 1, e no ponto de abscissa e. Esboce os gráficos.

20. Calcule $f'(x)$ sendo (a) $f(x) = \pi^x$ (b) $f(x) = 7^x$ (c) $f(x) = \log_3 x$ (d) $f(x) = \log_{\sqrt{2}} x$

21. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \text{tg}x$ no ponto de abscissa 0, e no ponto de abscissa $\pi/4$. Esboce os gráficos.

Gabarito

Exercício 7 b) $f'(0) = 0$
Exercício 8 $f'(x) = 2|x|$
Exercício 9 a) sim, b) não, c) sim.
Exercício 12 $f'(x) = 0$
Exercício 15 $y = 1 - 2(x-1)$
Exercício 16 $y = 1 + (x-1)/3$
Exercício 18: $y = 4x - 4$.
Exercício 19: $y = x - 1$ e $y = x/e$.
Exercício 21: $y = x$ e $y = 2x - \pi/2 + 1$.