1 Algumas primitivas

Simples...

$$\int c\,dt = cx + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + k, \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int Sh(x)\,dx = Ch(x) + k, \qquad \int Ch(x)\,dx = Sh(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = SetSh(x) + k,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

outras (cuidado: definir um apropriado intervalo!)

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R} \qquad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R},\ \text{em } (0,\infty) \\ &= \ln(-x) + k,\ \ k \in \mathbb{R},\ \text{em } (-\infty,0) \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= SetCh(x) + k,\ \text{em } (1,\infty) \\ &= -SetCh(-x) + k,\ \text{em } (-\infty,-1) \end{aligned}$$

2 Técnicas para calcular primitivas

Linearidade
Sejam f, g contínuas, Então

$$\int (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \left(\int \mathbf{f} \right) + \left(\beta \int \mathbf{g} \right)$$

Fórmula de integração por partes
Sejam f, g contínuas e deriváveis com derivadas contínuas. Então

$$\int \mathbf{f}'(\mathbf{t})\mathbf{g}(\mathbf{t})\, \mathbf{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \int \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{g}'(\mathbf{t})\, \mathbf{dt}\,.$$

Fórmula de integração por substituição
Sejam g contínua e derivável com derivada contínua, h contínua. Então

$$\int \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} = \mathbf{H}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\,,$$

sendo $\mathbf{H}(\mathbf{y}) = \int \mathbf{h}\,.$

Interpretação como mudança de variável:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})\, \mathbf{dx} &= \mathbf{H}(\mathbf{y}) + \mathbf{k}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})}\,,\ \mathbf{k} \in \mathbb{R} \\ &= \int \mathbf{h}(\mathbf{y})\, \mathbf{dy}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:
– *substituímos* $g(x) = y$ *e* $g'(x)dx = dy$*,*
– *calculamos a primitiva,*
– *pomos de volta* $y = g(x)$.

mais em geral, se a mudança é $f(x) = g(y)$, então $f'(x)\, dx = g'(y)\, dy$

Para as integráis definidas:

- Sejam f, g contínuas, Então

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f} \right) + \beta \left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{g} \right)$$

- Sejam f, g contínuas e deriváveis com derivadas contínuas em $[a, b]$. Então

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}'\mathbf{g} = [\mathbf{fg}]_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{fg}'$$

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{b})\mathbf{g}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})\mathbf{g}(\mathbf{a}) - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}'(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$$

- Sejam g contínua e derivável com derivada contínua em $[a, b]$ e h contínua em $Im(g|_{[a,b]})$, então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{g}'(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} &= [H(g(x))]_a^b = H(g(b)) - H(g(a)) \\ &= [H(y)]_{g(a)}^{g(b)} = \int_{\mathbf{g}(\mathbf{a})}^{\mathbf{g}(\mathbf{b})} \mathbf{h}(\mathbf{y})\,\mathbf{dy} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:

– *substituímos* $g(x) = y$ *e* $g'(x)dx = dy$*,*

– *substituímos* $g(a)$ *e* $g(b)$ *como extremos de integração,*

– *calculamos a integral.*

3 Integral de funções racionais (método das frações parciais)

Estas funções podem sempre ser integradas explicitamente: veja roteiro na lista de exercícios.

4 Dicas de integração

- **produto $x^n h(x)$ onde conheça primitivas de h:**
  integre por partes pondo $g(x) = x^n$, assim na integral que sobra terá $g'(x) = nx^{n-1}$... continuando até eliminar a potência.
  Funciona para $x^n e^x$, $x^n \cos(x), \ldots.$

  Exemplo:
  $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x \, dx =$
  $= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k, \ k \in \mathbb{R}$

- **produto $x^n h(x)$ onde h tem derivada racional:**
  integre por partes pondo $g(x) = h(x)$, assim na integral que sobra terá apenas uma racional.
  Funciona para $x^n \ln(x)$, $x^n atg(x), \ldots.$

  Exemplo:
  $\int x^2 \ln(x) \, dx = x^3 \ln(x)/3 - \int (x^3/3x) \, dx = x^3 \ln(x)/3 - x^3/9 + k, \ k \in \mathbb{R}$

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  integre por partes e depois use identidades...

  Exemplo:
  $\int Ch^2(x) \, dx = Sh(x)Ch(x) - \int Sh^2(x) \, dx =$
  $= Sh(x)Ch(x) - \int (Ch^2(x) - 1) \, dx$
  logo $2 \int Ch^2(x) \, dx = Sh(x)Ch(x) + \int 1 \, dx = Sh(x)Ch(x) + x + k, \ k \in \mathbb{R}$

- **trigonométrica com exponencial:**
  integre por partes duas vezes e leve do outro lado...
  Funciona também para $Sh(x) \cos(x)$, ...

  Exemplo:
  $\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) \, dx =$
  $= e^x \sin(x) - \left[e^x(-\cos(x)) - \int e^x(-\cos(x)) \, dx \right]$
  logo $2 \int e^x \cos(x) \, dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) + k, \ k \in \mathbb{R}$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:
  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(t),\ t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,Sh(t),\ t \in \mathbb{R}$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = \pm a\,Ch(t),\ t > 0$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

  Exemplo:
  $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = (x = 2Sh(t),\ dx = 2Ch(t)\,dt)\ \int \sqrt{4(1+Sh^2(t)}2\,Ch(t)\,dt$
  $= \int \sqrt{4Ch^2(t)}2\,Ch(t)\,dt = \int 4Ch^2(t)\,dt = ...$

  Alernativa:
  Também pode funcionar integrar por partes:
  $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = x\sqrt{4+x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx = x\sqrt{4+x^2} - \int \frac{4+x^2}{\sqrt{4+x^2}}\,dx + \int \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$: agora a primeira integral é igual ao lado esquerdo, a segunda é imediata $(SetSh)$

- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$
  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:

  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (y = 9 + x^2,\ dy = 2x\,dx)\ \int (y-9)\sqrt{y}\,dy/2 =$
  $= \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})dy/2 = ...$
  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (z = \sqrt{9+x^2},\ 2z\,dz = 2x\,dx)$
  $\int (z^2-9)z\,zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = ...$

4.1 Casos que podem ser reduzidos a racionais

Seja R[a,b,..] uma função racional nas variáveis $a, b, ..$

- $\int \mathbf{R}[\sin(\mathbf{x})]\,\cos(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} = \int R(t)\,dt$ *pondo* $t = \sin(x)$.
  O mesmo funciona para $R[\cos(x)]\,\sin(x)\,dx$ **e análogos hiperbólicos**.
  também os casos $R[\sin(x), \cos(x)^2]\,\cos(x)$ **e análogos** encaixam pois pode ver como $R[\sin(x), 1-\sin(x)^2]\,\cos(x)$

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\sin(x)}{1-\sin(x)+\cos^2(x)}\cos(x)\,dx = \int \frac{t^2-3t}{1-t+1-t^2}\,dt$$

- $\int R[\sin(x), \cos(x)]\,dx$ sempre pode ser tratada da maneira seguinte (mas deixar como última tentativa, pois as contas sao feias!)
  ponha $t = \tan(x/2)$, assim $\sin(x) = 2t/(1+t^2)$, $\cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2)$ e $dx = 2dt/(1+t^2)$.

  Para o caso $\int R[Sh(x), Ch(x)]\,dx$ *ponha* $t = Th(x/2)$, assim $Sh(x) = 2t/(1-t^2)$, $Ch(x) = (1+t^2)/(1-t^2)$ e $dx = 2dt/(1-t^2)$.

  Exemplo:

  $$\int \frac{\sin(x)^2 - 3\cos(x)}{1-\sin(x)+\cos(x)}\,dx = \int \frac{4t^2/(1+t^2) - 3(1-t^2)}{1-2t+(1-t^2)}\,\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

- $\int \sin^n(x)\cos^k(x)\,dx, \quad (n, k \in \mathbb{Z})$:

  - *se* n *ou* k *é ímpar, substitua a outra:*
    Exemplo:
    $\int \sin^8(x)\cos^7(x)\,dx = (t = \sin(x),\ \ dt = \cos(x)\,dx)$
    $\int t^8(1-t^2)^3\,dt = \ldots$
  - *se ambas são par, use as fórmulas de duplicação para baixar o grau*:
    Exemplo:
    $\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \int (1-\cos(2x))/2 \cdot (1+\cos(2x))/2\,dx =$
    $= \int (1-\cos^2(2x))/4\,dx = \ldots$

- $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx$ **ou** $\int \sin(nx)\sin(kx)\,dx$ **ou** $\int \cos(nx)\cos(kx)\,dx$:
  use fórmulas trigonométricas
  Exemplo:
  $\int \sin(nx)\cos(kx)\,dx = \int (\sin(nx-kx)+\sin(nx+kx))/2\,dx =$
  $= \ldots$