1 Primitivas

Definição

Dadas $f, F : I \to \mathbb{R}$, sendo I intervalo, se $F' = f$ em I dizemos que **F é primitiva de f em I.**

Vale:

- se F é primitiva de f em I então $F + c$ também, $\forall\, c \in \mathbb{R}$;
- se F, G são primitivas de f em I então $F - G = const$
- se f é contínua em I então existe uma primitiva de f.

Definição:

Indicaremos com

$$\int f \quad \text{ou} \quad \int f(x)\, dx$$

a **integral indefinida de f**: a família (conjunto) de todas as primitivas de f (num certo intervalo fixado I):

$$\int f = \{F(x) + k,\ k \in \mathbb{R} :\ F' = f \ \text{ em } I\}.$$

2 Algumas primitivas

Simples...

$$\int c\,dt = cx + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + k, \qquad \int \cos(x)\,dx = \sin(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int Sh(x)\,dx = Ch(x) + k, \qquad \int Ch(x)\,dx = Sh(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + k, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = SetSh(x) + k,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + k, \qquad k \in \mathbb{R}$$

outras (cuidado: definir um apropriado intervalo!)

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \ k \in \mathbb{R} \qquad \text{se } \alpha \neq -1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x}\,dx &= \ln(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R},\ \text{em } (0,\infty) \\ &= \ln(-x) + k,\ \ k \in \mathbb{R},\ \text{em } (-\infty,0) \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x) + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= SetCh(x) + k,\ \text{em } (1,\infty) \\ &= -SetCh(-x) + k,\ \text{em } (-\infty,-1) \end{aligned}$$

3 Técnicas para calcular primitivas

Linearidade

Sejam $f, g, F, G : I \to \mathbb{R}$ tais que $F' = f$ e $G' = g$ em I. Então

$$\mathbf{(aF + bG)' = af + bg} \ \text{ em } I$$

Fórmula de integração por substituição

Sejam g contínua e derivável com derivada contínua, h contínua. Então

$$\int \mathbf{h(g(x))g'(x)\,dx = H(g(x)) + k,\ \ k \in \mathbb{R}}$$

onde $\mathbf{H'(y) = h(y)}$.

Interpretação como mudança de variável:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{h(g(x))g'(x)\,dx} &= \mathbf{H(y) + k}\Big|_{\mathbf{y=g(x)}}, \ \mathbf{k} \in \mathbb{R} \\ &= \int \mathbf{h(y)\,dy}\Big|_{\mathbf{y=g(x)}} \end{aligned}$$

podemos interpretar assim:

– *substituímos* $g(x) = y$ *e* $g'(x)dx = dy$,

– *calculamos a primitiva,*

– *pomos de volta* $y = g(x)$.

4 Dicas de integração

- **quadrado de trigonométrica ou hiperbólica:**
  use relações trigonométricas com $\cos(2x)$ e $Ch(2x)$:

  Exemplo:
  $2\int Ch^2(x)\,dx = \int (Ch(2x)+1)\,dx =$
  $= \frac{1}{2}Sh(2x) + x + k = Sh(x)Ch(x) + x + k,\ \ k \in \mathbb{R}$

- **substituição trigonométrica ou hiperbólica:** quando aparece o termo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$, se não tiver substituição melhor:

  - no caso $\sqrt{a^2 - x^2}$, substitua $x = a\sin(t),\ \ t \in (-\pi/2, \pi/2)$;
  - no caso $\sqrt{a^2 + x^2}$, substitua $x = a\,Sh(t),\ \ t \in \mathbb{R}$;
  - no caso $\sqrt{x^2 - a^2}$, substitua $x = \pm a\,Ch(t),\ \ t > 0$.

  isso leva a eliminar a raiz usando relações trigonométricas-hiperbólicas.

  Exemplo:
  $\int \sqrt{4+x^2}\,dx = (x = 2Sh(t),\ \ dx = 2Ch(t)\,dt)\ \int \sqrt{4(1+Sh^2(t)}2\,Ch(t)\,dt$
  $= \int \sqrt{4Ch^2(t)}2\,Ch(t)\,dt = \int 4Ch^2(t)\,dt = \ldots.$

- **Caso** $\int x^n \left(\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}\right)^{\pm 1}$

  - Se n é par use a substituição trigonométrica ou hiperbólica acima.
  - Se n é ímpar, também as substituições $y = \pm a^2 \pm x^2$ ou $z = \sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ podem funcionar.

  Exemplo:

  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (y = 9 + x^2,\ \ dy = 2x\,dx)\ \int (y-9)\sqrt{y}\,dy/2 =$
  $= \int (y^{3/2} - 9\sqrt{y})dy/2 = \ldots$
  $\int x^3\sqrt{9+x^2}\,dx = (z = \sqrt{9+x^2},\ \ 2z\,dz = 2x\,dx)$
  $\int (z^2-9)z\,zdz = \int (z^4 - 9z^2)dz = \ldots$