1 Conjuntos numéricos

- **Números naturais**

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

– Soma e produto definidos naturalmente. Problemas nas operações inversas!

- **Números inteiros**

$$\mathbb{Z} = \{.., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

– Podemos definir a inversa da soma, não do produto.

- **Números racionais**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{N}; \ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \Leftrightarrow ad = cb \right\}$$

– Soma e produto definidos assim:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

– Podemos definir a inversa da soma e do produto: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um **Corpo**!

– Ordem definido assim:

$$0 \leq \frac{a}{b} \text{ se } a \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{e} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \text{ se } 0 \leq \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

(e $a \geq b$ significa $b \leq a$)

– $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ é um **Corpo ordenado**, mas não é completo!

– Podemos identificar $\mathbb{Z}$ com um subconjunto de $\mathbb{Q}$ de maneira compatível com as operações e a ordem: $\mathbb{Z} \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in \mathbb{Q}$.

- **Números reais**: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ será um **Corpo ordenado completo**.

– $\mathbb{R}$ representado pela reta: a cada real corresponde um ponto e viceversa.

– assim podemos ver $\mathbb{Q}$ dentro de $\mathbb{R}$ e definir operações e ordem em $\mathbb{R}$.

2 Definição de Corpo

$(\mathbb{K}, +, \cdot)$, isto é, um conjunto $\mathbb{K}$ com uma operação $+$ dita *soma* e outra operação $\cdot$ dita *produto*, é um **Corpo** se valem as propriedades:

(S1) (associativa da soma) $(x+y)+w = x+(y+w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(S2) (comutativa da soma) $x + y = y + x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(S3) (elemento neutro da soma) existe $z \in \mathbb{K}$ tal que $x+z = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(S4) (oposto da soma) para todo $x \in \mathbb{K}$ existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x + y = z$;

(P1) (associativa do produto) $(x \cdot y) \cdot w = x \cdot (y \cdot w)$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$;

(P2) (comutativa do produto) $x \cdot y = y \cdot x$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$;

(P3) (elemento neutro do produto) existe $u \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot u = x$ para todo $x \in \mathbb{K}$;

(P4) (inverso do produto) para todo $x \in \mathbb{K}$ com $x \neq z$, existe $y \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot y = u$;

(D) (distributiva) $(x + y) \cdot w = x \cdot w + y \cdot w$, para quaisquer $x, y, w \in \mathbb{K}$.

Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo:

(a). os neutros são únicos (logo indicaremos com 0 e 1);

(b). oposto e inverso são únicos (logo indicaremos com $\overline{x}$ e x^{-1});

(c). $x \cdot 0 = 0$ e $\overline{x} = \overline{1} \cdot x$

(d). (cancelamento da soma) $x + w = y + w$ implica $x = y$;

(e). (cancelamento do produto) $x \cdot w = y \cdot w$ sendo $w \neq 0$ implica $x = y$;

(f). (anulamento do produto) $x \cdot w = 0$ implica $x = 0$ e/ou $w = 0$;

3 Definição de Corpo ordenado

$(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$, isto é, um corpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ com uma relação $\leq$ dita *ordem*, é dito **Corpo ordenado** se

- valem S1,..S4,P1,..,P4,D e também

(O0) (totalidade da ordem) para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$, vale $x \leq y$ e/ou $y \leq x$;

(O1) (reflexividade da ordem) para qualquer $x \in \mathbb{K}$, vale $x \leq x$;

(O2) (antissimetria da ordem) se $x, y \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$;

(O3) (transitividade da ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $y \leq w$ então $x \leq w$;

(OS) (relação soma-ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$ e $x \leq y$ então $x + w \leq y + w$;

(OP) (relação produto-ordem) se $x, y, w \in \mathbb{K}$, $x \leq y$ e $w \geq 0$ então $x \cdot w \leq y \cdot w$;

Algumas propriedades que seguem das propriedades de corpo ordenado:

(a). $x \leq y$ e $z \leq w$ implica $x + z \leq y + w$

(b). $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq z \leq w$ implica $x \cdot z \leq y \cdot w$

(c). $w \geq 0$ se e só se $\overline{w} \leq 0$;

(d). $x \leq y$ e $w \leq 0$ implica $x \cdot w \geq y \cdot w$

(e). $0 \leq 1$

Algumas outras propriedades que seguem das propriedades de corpo ordenado (aqui $x < y$ significa $x \leq y$ com $x \neq y$)

(f). $x < y$ e $z \leq w$ implica $x + z < y + w$

(g). $z > 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z < y \cdot z$

(h). $z < 0$ e $x < y$ implica $x \cdot z > y \cdot z$

(i). $0 < x < y$ implica $0 < y^{-1} < x^{-1}$ e $\overline{y} < \overline{x} < 0$

(j). $y < x < 0$ implica $x^{-1} < y^{-1} < 0$ e $0 < \overline{x} < \overline{y}$

(k). $x < 0 < y$ implica $x^{-1} < 0 < y^{-1}$

(l). $0 < 1$

4 Definição de inf, sup e completeza

Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ um corpo ordenado e $A \subseteq \mathbb{K}$

- - se $x \in \mathbb{K}$ é tal que $x \geq a \; \forall \, a \in A$ então x é dito **cota superior de A**
  - se $x \in \mathbb{K}$ é tal que $x \leq a \; \forall \, a \in A$ então x é dito **cota inferior de A**
- - se existir uma cota superior de A então dizemos que A é **limitado superiormente**
  - se existir uma cota inferior de A então dizemos que A é **limitado inferiormente**
  - se ambas as anteriores acontecem dizemos que A é **limitado**)
- - chamamos de **supremo de A** a menor das cotas superiores de A (se existir)
  - chamamos de **ínfimo de A** a maior das cotas inferiores de A (se existir)

Dizemos que o corpo ordenado $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é **completo** se todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado superiormente possui supremo e todo subconjunto de $\mathbb{K}$ limitado inferiormente possui ínfimo

---

Teorema (Existência das raízes). *Para todo real $\alpha \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = \alpha$.*

Lembrete:
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, o símbolo $\sqrt[n]{\alpha}$

- se n é par e $\alpha < 0$, o símbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ não faz sentido
- se n é par e $\alpha \geq 0$, o símbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ indica o único $y \geq 0$ tal que $y^n = \alpha$
- se n é ímpar, o símbolo $\sqrt[n]{\alpha}$ indica o único y tal que $y^n = \alpha$

5 Definição e notação de intervalos

Sejam $a < b$ números reais: chamamos de **intervalos em $\mathbb{R}$** os seguintes conjuntos:

- intervalos limitados:
  - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$: **interv. limitado fechado**
  - $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$: **interv. limitado aberto**
  - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
  - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$: **interv. limitado semifechado (ou semiaberto)**
- intervalos não limitados:
  - $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$: **semireta fechada**
  - $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$: **semireta aberta**
  - $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$: **semireta fechada**
  - $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$: **semireta aberta**
  - $\mathbb{R}$: **reta real**

6 Modulo de um real

Definimos módulo de x, para $x \in \mathbb{R}$:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Propriedades:

- $|x| \geq 0$
- $|x| \geq x$ e $|x| \geq -x$
- $|xy| = |x||y|$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdade triangular)

Observe que $|x|^2 = x^2$ enquanto $\sqrt{x^2} = |x|$!!!!